யா. பெரெல்மான்

விளையாட்டுக் கணிதம்

Я. ПЕРЕЛЬМАН

ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАССКАЗЫ И ГОЛОВОЛОМКИ

யா.
பெரெல்மான்

விளையாட்டு கணிதம்

புதிர்களும் கதைகளும்

மீர்
பதிப்பகம்
மாஸ்கோ

மொழிபெயர்ப்பாளர்: ரா. கிருஷ்ணையா
ஓவியர்கள்: யெ. தாரோன், வி. கொரல்கோவ்

Я. ПЕРЕЛЬМАН

Живая математика

На тамильском языке

இரண்டாம் பதிப்பு

சோவியத் நாட்டில் அச்சிடப்பட்டது

பொருளடக்கம்

அத்தியாயம் 3

மேலும் பன்னிரண்டு புதிர்கள்

அத்தியாயம் 4

எண்ணிக் கணக்கிட தெரியுமா?

அத்தியாயம் 5

திணறடிக்கும் எண்கள்

அத்தியாயம் 6

அசுர எண்கள்

அத்தியாயம் 7

அளவுகோலின்றி அளவிடுதல்

அத்தியாயம் 8

வடிவகணிதப் புதிர்கள்

அத்தியாயம் 11

மதிநுட்பச் சோதனை

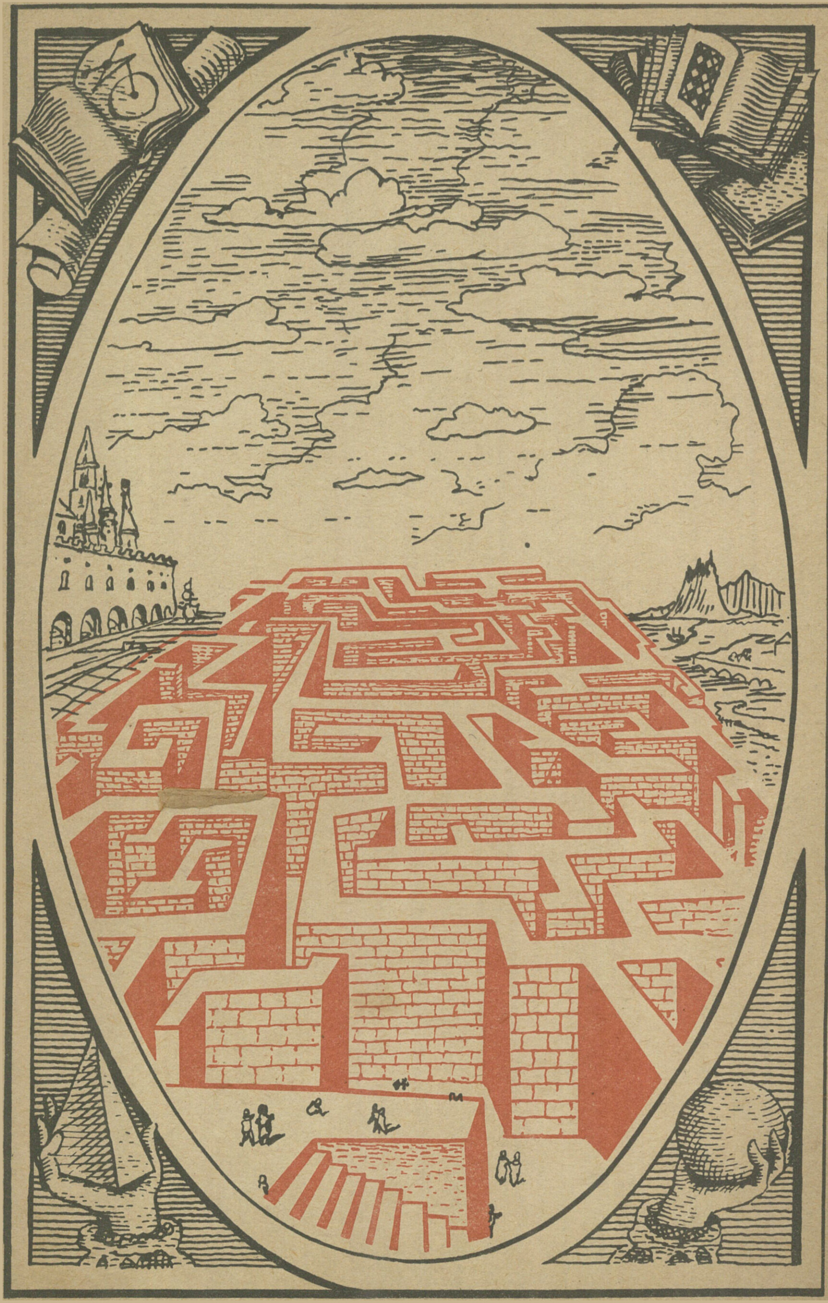
முன்னுரை

இந்தப் புத்தகத்தைப் படிப்பதற்கும் சுவைத்து மகிழ்வதற்கும் கணிதம் அதிகமாய்த் தெரிந்திருக்க வேண்டும் என்பதில்லை, எண்கணித விதிகளும் ஆரம்ப வடிவகணிதமும் தெரிந்திருந்தாலே போதும். இங்குள்ள புதிர்களில் மிகச் சொற்பமானவற்றுக்கே சமன்பாடுகளை அமைப்பதற்கும் அவற்றுக்கு விடை காண்பதற்குமான திறன் தேவையாய் இருக்கும்—அந்தச் சமன்பாடுகளுங்கூட மிகமிக எளியவையே.

நானுவிதமான விவரப் பொருள்களும் இப்புத்தகத்தில் இடம் பெறுவதைப் பொருளடக்கத்திலிருந்தே நீங்கள் தெரிந்து கொள்ளலாம்: பல்வேறு வகைப்பட்ட புதிர்கள், கணித வேடிக்கைகள் முதல் எண்ணிக்கணக்கிடுதலும் அளவிடுதலும் சம்பந்தமான நடைமுறை வேலைகளுக்கு உதவும்படியான பிரச்சினைகள் வரையிலான பலவும் இங்கு இருக்கக் காண்பீர்கள். புத்தக ஆசிரியர் தமது பிற நூல்களில் (வித்தைகளும் வேடிக்கைகளும், சுவையான கணக்குகள் முதலியவை) ஏற்கனவே வெளிவந்தவை திரும்பவும் இங்கு வெளிவருவதைத் தவிர்த்து, இப்புத்தகத்தைக் கூடுமான அளவுக்குப் புதுமைப் பொலிவுடையதாக்க முயன்றுள்ளார். முந்திய புத்தகங்களில் இடம் பெறுத சுமார் நூறு மூளைக் குழப்பிப் புதிர்களை வாசகர் இங்கு காணலாம். ''அசுர எண்கள்'' என்னும் தலைப்புடைய ஆறுவது அத்தியாயம் ஆசிரியரது முந்திய பிரசுரங்களில் ஒன்றின் தழுவலாகும்; அதோடு நான்கு புதிய கதைகளும் இந்த அத்தியாயத்தில் சேர்க்கப் பட்டிருக்கின்றன.

1

மூளைக் குழப்பிகள்



மழை ஓயவில்லை.... விடுமுறை இல்லத்தில் தங்கியிருந்த நாங்கள் மதிய உணவருந்துவதற்காக உட்கார்ந்தோம். அப்போது விடுமுறையாளர்களில் ஒருவர் காலையில் தமக்கு நேர்ந்த விபரீதத்தைச் சொல்லலாமா என்று கேட்டார்.

என்ன நேர்ந்தது, சொல்லுங்கள் என்றோம். அவர் கதையைச் சொன்னார்.

1. **திடலில் ஓர் அணில்.—**

''என்னுடன் ஓர் அணில் ஒளிந்து விளையாடிற்று, வேடிக்கையாய் இருந்தது'' என்றார் அவர். ''இங்கே இருக்கும் வட்டமான சிறு திடலும் தனி மரமாய் அதன் மையத்தில் நிற்கும் பிர்ச் மரமும் உங்களுக்குத் தெரிந்திருக்கும். அந்த மரத்தில் ஒளிந்து கொண்டு ஓர் அணில் என்னை உற்றுப் பார்த்தது. தோப்பிலிருந்து திடலுக்குள் சென்ற நான் அடிமரத்தின் பின்பக்கத்திலிருந்து அணிலின் மூக்கும் பளபளப்பான இரு விழிகளும் தெரியக் கண்டேன். அந்த அணிலின் உடலையும் பார்க்க வேண்டுமென விரும்பிய நான், அருகே சென்றால் பயந்து ஓடிவிடுமென்று தொலைவில் திடலின் ஓரமாய் நடந்து சுற்றிச் சென்றேன். நான்கு சுற்றுகள் சுற்றி வந்துவிட்டேன், ஆனால் அந்தப் பொல்லாத அணில் அடிமரத்தின் பின்பக்கத்திலிருந்து திருட்டு முழி முழித்தவாறு பின்னோக்கி நகர்ந்து கொண்டிருந்தது. எவ்வளவோ முயன்றும் என்னால் அணிலைச் சுற்றி வந்து அதன் பின்புறத்தைப் பார்க்க முடியவில்லை.''

''நான்கு தரம் மரத்தைச் சுற்றி வந்ததாய் நீங்கள் தானே சொன்னீர்கள்'' என்று இடைமறித்தார், அவர் கதையைக் கேட்டுக் கொண்டிருந்த ஒருவர்.

''ஆமாம், மரத்தைச் சுற்றி வந்தேன்தான், ஆனால் அணிலைச் சுற்றி வர முடியவில்லை.''

''மரத்தில்தானே இருந்தது அந்த அணில்?''

''மரத்தில்தான் இருந்தது.''

''அப்படியானால் நீங்கள் அணிலையும் சுற்றி வந்ததாய்த் தான் அர்த்தம்.''

''என்னால் அணிலின் பின்புறத்தைப் பார்க்க முடியவில்லை, அணிலை நான் சுற்றி வந்ததாய் எப்படிச் சொல்வது?''

''அணிலின் பின்புறத்தை ஏன் இங்கு இழுக்கிறீர்கள்? திடலின் மையத்தில் மரத்தில் இருந்தது அணில்; நீங்கள் அந்த மரத்தைச் சுற்றி வந்தீர்கள்; அப்படியானால் நீங்கள் அணிலையும்தான் சுற்றி வந்தீர்கள்.''

''இல்லை, இல்லை! உங்களை நடுவில் வைத்து நான் சுற்றி வருவதாய் வைத்துக் கொள்வோம். அதேபோது நீங்கள் எந்நேரமும் உங்கள் முகம் என்னைப் பார்க்கும்படித் திரும்பிக் கொண்டிருக்கிறீர்கள். அப்போது உங்களை நான் சுற்றி வருவதாய்ச் சொல்ல முடியுமா?''

''வேறு என்ன சொல்வதாம்? சுற்றி வருவதாய்த்தான் சொல்ல வேண்டும்.''

''என்றால் உங்கள் முதுகுப் பக்கம் செல்ல முடியவில்லை, உங்கள் முதுகைப் பார்க்கவே முடியவில்லை, அப்போதும்கூட உங்களை நான் சுற்றி வருவதாய்ச் சொல்கிறீர்களே, சரியா இது?''

''முதுகை மறந்துவிடுங்கள்! நீங்கள் என்னைச் சுற்றி வருகிறீர்கள்—இங்கு நாம் கவனிக்க வேண்டியது இது ஒன்றுதான். முதுகை நீங்கள் பார்க்க முடிகிறதா, இல்லையா என்பதல்ல பிரச்சினை.''

''சரி, ஒன்றைச் சுற்றி வருதல் என்பதன் அர்த்தம் என்ன? எதைச் சுற்றி வருகிறேனோ அதை நாற்புறமிருந்தும் பார்க்கும்படியான விதத்தில் இடம் பெயர்ந்து செல்கிறேன் என்பதாய் இதை நான் புரிந்து கொள்கிறேன். அதுதானே இதன் அர்த்தம்? பேராசிரியர் நமக்குத் தெளிவாய்க் கூறட்டும்'' என்று சொல்லி, எங்களுடன் அமர்ந்து சாப்பிட்டுக் கொண்டிருந்த முதியவரின் பக்கம் திரும்பினார் அவர்.

''உங்கள் வாக்குவாதம் பூராவும் உண்மையில் ஒரு சொல்லைப் பற்றியதாகும்'' என்று பதிலளித்தார் பேராசிரியர். ''முதலில் நீங்கள் 'சுற்றிவருதல்' என்னும் இந்தச் சொல்லின் அர்த்தம் குறித்து உடன்பாட்டுக்கு வர வேண்டும். 'ஒரு பொருளைச் சுற்றிவருதல்' என்பதை நீங்கள் எப்படிப் புரிந்து கொள்கிறீர்கள்? இரண்டு விதமாய் இதைப் புரிந்து கொள்ளலாம். முதலாவதாக, நீங்கள் அப்பொருளை மையமாய்க் கொண்ட ஒரு வட்டத்தில் சென்று அதைச் சுற்றி வருவதாய்க் கொள்ளலாம். இரண்டாவதாக, நீங்கள் அப்பொருளை எல்லாப் பக்கங்களிலிருந்தும் பார்க்கும்படி அதைச் சுற்றி வருவதாய்க் கொள்ளலாம். முதலாவது அர்த்தத்தை

ஏற்றுக் கொள்வீர்களாயின், அணிலை நீங்கள் நான்கு முறை சுற்றிவந்ததாய்ச் சொல்லலாம். இரண்டாவதுதான் ஏற்றுக் கொள்ளப்பட வேண்டும் என்பீர்களாயின், அணிலை நீங்கள் சுற்றிவரவில்லையெனச் சொல்லலாம். ஒரே மொழியில் பேசி சொற்களின் அர்த்தத்தை ஒரே விதத்தில் புரிந்து கொள்வோமாயின், இங்கு வாக்குவாதத்துக்கு இடம் இருக்காது.''

''சரி, இரண்டு அர்த்தங்கள் இருப்பதாய் ஒத்துக் கொள்கிறேன். ஆனால் இரண்டில் ஏது சரியானது?''

''இப்படிக் கேட்பது சரியாகாது. ஏனெனில் இரண்டு அர்த்தங்களில் எதை வேண்டுமானாலும் சரியானதாய் ஒத்துக் கொள்ளலாம். இந்த இரண்டு அர்த்தங்களில் பொதுவாய் அதிக அளவுக்கு ஏற்கத்தக்கதாய் இருப்பது எது என்பதுதான் இங்கு எழும் கேள்வி. எனது கருத்துப்படி முதலாவதுதான். ஏனென்று சொல்கிறேன், கேளுங்கள். சூரியன் 25 நாட்களுக்குச் சற்று அதிகமான காலத்தில் தன்னைத் தானே ஒரு தரம் சுற்றிக் கொள்கிறது...''

''சூரியன் தன்னைத் தானே சுற்றிக் கொள்கிறதா, என்ன?''

''ஆம், பூமியைப் போலவே சூரியனும் தன்னைத் தானே சுற்றிக் கொள்கிறது. 25 நாட்களுக்குப் பதிலாய், $365^1/_4$ நாட்களில்—அதாவது ஒரு முழு ஆண்டில்—அது தன்னைத் தானே ஒரு தரம் சுற்றிக் கொள்வதாய் வைத்துக் கொள்வோம். அப்போது காலமெலாம் பூமியானது சூரியனுடைய ஒரு பக்கத்தை மட்டுமே, சூரியனுடைய ''முகப்'' பக்கத்தை மட்டுமே பார்த்துக் கொண்டிருக்கும். ஆயினும் பூமி சூரியனைச் சுற்றி வரவில்லை என்பதாய் எவரும் வாதாட முடியாதல்லவா?''

''ஆம், வாதாட முடியாதுதான், நான் அணிலைச் சுற்றி வந்தேன் என்பது இப்போது தெளிவாய் விளங்குகிறது.''

''நண்பர்களே, எனக்கு ஒரு யோசனை தோன்றுகிறது!'' என்றார் சாப்பாட்டு மேஜையைச் சுற்றி அமர்ந்திருந்தோரில் ஒருவர். ''மழை ஓய்வதாய் இல்லை. யாரும் இப்போது வெளியே போக முடியாது. ஆகவே நாம் புதிர்கள் போட்டு விளையாடலாம். அணிலைப் பற்றிய இந்தப் புதிர் நல்ல துவக்கமாகும். மூளையைக் குழப்பித் திகைக்க வைக்கக் கூடிய புதிர்களாய் ஒவ்வொருவரும் ஆலோசித்துக் கூறுவோம்.''

''இயற்கணிதம், அல்லது வடிவகணிதம் சம்பந்தப்பட்ட புதிர்கள் போடப் போகிறீர்கள் என்ருல், நான் விலகிக் கொண்டுவிடுகிறேன்'' என்ருள் ஓர் இளம் பெண்.

''நானும்தான்'' என்ருர் இளைஞர் ஒருவர்.

''யாரும் விலகிக் கொள்ளக் கூடாது, எல்லாரும் கலந்து கொள்ள வேண்டுமெனக் கேட்டுக் கொள்கிறேன். கடின மான இயற்கணித, வடிவகணித சூத்திரங்களைத் தவிர்த்துக் கொள்வோம், யாவருக்கும் தெரிந்த எளிய விதிகளுக்கு மேல் தேவைப்படும்படியான புதிர்களைப் போட மாட்டோ மென்று வாக்குறுதி அளிக்கிறேன்.''

''அப்படியானல் சரி, ஆரம்பியுங்கள்!'' எல்லோரும் ஒருமனதாய்க் கூறினர்.

''இன்னென்று. பேராசிரியரை நமது நடுவராய் இருந்து உதவும்படி வேண்டுகிறேன்.''

2. பள்ளிக்கூட குழுக்கள்.—

''எங்கள் பள்ளிக்கூடத்தில் பாடத்திட்டம் சாராத குழுக் கள் மொத்தம் ஐந்து இருக்கின்றன'' என்ருன் முன்னணி இளைஞன் ஒருவன். ''அவையாவன: அரசியல் குழு, இலக்கியக் குழு, புகைப்படக் குழு, சதுரங்கக் குழு, பாட்டுக் குழு. அரசியல் குழு ஒரு நாள் விட்டு ஒரு நாளும், இலக்கியக் குழு ஒவ்வொரு மூன்ரும் நாளும், புகைப்படக் குழு ஒவ்வொரு நான்காம் நாளும், சதுரங்கக் குழு ஒவ்வொரு ஐந்தாம் நாளும், பாட்டுக் குழு ஒவ்வொரு ஆரும் நாளும் கூடுகிறது. இந்த ஐந்து குழுக்களும் ஜனவரி 1ல் கூடின, இதன் பிறகு அந்தந்த குழுவும் அதற்குரிய நாட்களில் கூடின. ஆண்டின் முதலாவது கால் பகுதியில் ஜனவரி 1ஐத் தவிர்த்து ஒரே நாளில் ஐந்து குழுக்களும் கூடியது எத்தனை தரம்?''

''லீப் ஆண்டா அது?''

''இல்லை.''

''அப்படியானல், அந்த ஆண்டின் முதலாவது கால் பகுதி யில் 90 நாட்கள் இருந்திருக்க வேண்டும்.''

''ஆமாம்.''

''நான் இரண்டாவது கேள்வி ஒன்றையும் கேட்கிறேன்'' என்று இடையில் புகுந்து கூறினர் பேராசிரியர். ''அந்த

ஆண்டின் முதலாவது கால் பகுதியில் எந்தக் குழுவும் கூடாத நாட்கள் எத்தனை?''

''ஓகோ, புதிரில் ஏதோ சூது இருக்கும் போல் தெரிகிறதே. ஜனவரி 1ஐத் தவிர்த்து ஐந்து குழுக்களும் கூடிய நாளும் இல்லை, எக்குழுவும் கூடாத நாளும் இல்லை, அப்படித்தானே?''

''ஏன் அப்படி?''

''எனக்குத் தெரியாது, ஆனால் இதில் சூது இருக்கிறது என்பது தெளிவாய்த் தெரிகிறது எனக்கு.''

''நண்பர்களே'' என்றார், புதிர் போட்டு விளையாடலாம் என்ற யோசனையை முதலில் கூறியவர். ''பதிலை இப்போது தெரிவிக்க வேண்டாம். எல்லாரும் நன்கு சிந்திப்பதற்குப் போதிய நேரம் வேண்டும். இரவு நாம் சாப்பிடும் போது பேராசிரியர் பதில்களைத் தெரிவிப்பார்.''

3. அதிகம் எண்ணியது யார்?—

''வீட்டின் வாயிற் கதவுக்கு முன்னால் நிற்கிறார் ஒருவர், தெருவின் நடைபாதைத் தளத்தில் அப்படியும் இப்படியுமாய் நடக்கிறார் இன்னொருவர். இவர்கள் இருவரும் ஒரு மணி நேரத்தில் இந்த நடைபாதையில் செல்லும் பாதசாரிகளை எண்ணிக் கணக்கிடுகிறார்கள். இருவரில் அதிகம் எண்ணுகிறவர் எவர்?''

''நடைபாதையில் அப்படியும் இப்படியுமாய் நடப்பவர் தான் அதிகம் எண்ணுகிறவராய் இருப்பார்'' என்று மேஜையின் கோடியிலிருந்து யாரோ ஒருவர் கூறினார்.

''சரியான விடை இரவு சாப்பாட்டின் போது அறிவிக்கப் படும், அடுத்தவர் தமது புதிரைச் சொல்லட்டும்'' என்றார் பேராசிரியர்.

4. தாத்தாவும் பேரனும்.—

''1932ல் என்னுடைய வயது நான் பிறந்த ஆண்டின் கடைசி இரு இலக்கங்களுக்குச் சமமாய் இருந்தது. நான் இந்த இசைவை எனது தாத்தாவிடம் சொன்ன போது, தமக்கும் இந்த இசைவு பொருந்துகிறதென்று அவர் சொல்லியதைக் கேட்டு நான் வியப்புற்றுவிட்டேன். அது எப்படி இருக்க முடியும் என்று நினைத்தேன்...''

''இருக்க முடியாதுதான்'' என்றாள் ஓர் இளம் பெண்.

''ஆனால் இருக்க முடியுமென்பது தெரியவந்தது, தாத்தா அதை நிரூபித்துக் காட்டினார். 1932ல் எனக்கு என்ன வயது? தத்தாவுக்கு என்ன வயது?''

5. ரயில் டிக்கெட்டுகள்.—

''நான் ரயிலில் சென்று டிக்கெட்டு விற்கிறவள்'' என்றார் அடுத்தவரான ஒரு பெண். ''இதை மிக எளிய வேலையாய்ப் பலரும் நினைக்கிறார்கள். ஒரு சிறிய ரயில் பாதையிலும் எத்தனை வகையான டிக்கெட்டுகள் விற்க வேண்டியிருக்கிறது என்பதை இவர்கள் ஆலோசித்துப் பார்ப்பதில்லை. எனது ரயில் பாதையில் 25 நிலையங்கள் இருக்கின்றன, இந்தப் பாதையில் இரு திசைகளிலும் செல்லுகையில் ஒவ்வொரு நிலையத்திலிருந்தும் ஏனைய ஒவ்வொரு நிலையத்துக்கும் வெவ்வேறு டிக்கெட்டுகளை நான் விற்கிறேன். எனது பாதையில் நான் விற்கும் டிக்கெட்டுகள் எத்தனை வகையானவை என்று சொல்லுங்கள்.''

''தோழர் விமானி, உங்களுடைய புதிரைச் சொல்லுங்கள்'' என்றார் பேராசிரியர்.

6. ஏவுகணை.—

''லெனின்கிராதிலிருந்து ஓர் ஆகாயக் கப்பல் புறப்பட்டு வட திசையில் சென்றது. 500 கிலோமீட்டர் சென்றபின் கிழக்கில் திரும்பி 500 கிலோமீட்டர் சென்றது. பிறகு அது தெற்கில் திரும்பி 500 கிலோமீட்டர் சென்றது. இதன்பின் மேற்கில் திரும்பி 500 கிலோமீட்டர் சென்று தரையில் இறங்கிற்று. நான் கேட்கும் கேள்வி என்னவெனில், அது எங்கே தரையில் இறங்கிற்று: லெனின்கிராதுக்கு மேற்கிலா, கிழக்கிலா, வடக்கிலா, தெற்கிலா?''

''எளிதாய்ச் சொல்லிவிடலாம்'' என்றார் ஒருவர். ''முன்னோக்கி 500 அடி, பிறகு வலப் பக்கம் திரும்பி 500 அடி, பின்னோக்கி 500 அடி, பிறகு இடப் பக்கம் 500 அடி நடந்தால், புறப்பட்ட இடத்துக்கே தான் திரும்பி வருவீர்கள்!''

''அப்படியானால் ஆகாயக் கப்பல் எங்கே வந்து தரையில் இறங்கிற்று?''

''லெனின்கிராதில்தான், வேறு எங்கே?''

''தப்பு!''

''அது எப்படி? புரியவில்லை எனக்கு.''

''இந்தப் புதிரில் ஏதோ மர்மம் இருக்கிறது'' என்றார் வேறொருவர்.

''புதிரைத் திரும்பவும் சொல்லுங்கள்.''

விமானி தமது புதிரைத் திருப்பிச் சொன்னார். எல்லோரும் ஒருவரையொருவர் பார்த்துக் கொண்டார்கள்.

''சரி, சிந்தித்துப் பார்ப்போம்'' என்று கூறினார் பேராசிரியர். ''இனி அடுத்தவர் புதிர் போடட்டும்.''

7. நிழல்.—

''எனது புதிரும் ஆகாயக் கப்பலைப் பற்றியதுதான்'' என்றார் அடுத்தவர். ''எது அதிக நீளமுடையது, ஆகாயக் கப்பலா, அதன் நிறை நிழலா (umbra)?''

''இவ்வளவுதானா?''

''இவ்வளவுதான்.''

படம் 1. மேகத்துக்குப் பின்னாலிருந்து விரிந்து செல்லும் சூரியக் கிரணங்கள்.

"சரி, ஆகாயக் கப்பலைக் காட்டிலும் அதன் நிழல்தான் பெரிதாய் இருக்கும், சூரியக் கிரணங்கள் விசிறி போல் விரிந்து பரவுகின்றவை ஆயிற்றே."

"நான் அப்படிச் சொல்லமாட்டேன்" என்றார் வேறொருவர். "சூரியக் கிரணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று இணை கோடுகளாய் இருப்பவை, ஆகவே ஆகாயக் கப்பலும் அதன் நிழலும் ஒரே அளவாய்த்தான் இருக்கும்."

"இல்லை, அப்படி இருக்க முடியாது. மேகத்துக்குப் பின்னாலிருந்து சூரியக் கிரணங்கள் விரிந்து விலகிச் செல்வதை பார்த்ததில்லையா நீங்கள்? மேகத்தின் நிழல் மேகத்தைக் காட்டிலும் எப்படிப் பெரிதாய் இருக்குமோ அதே போல் ஆகாயக் கப்பலின் நிழலும் ஆகாயக் கப்பலைக் காட்டிலும் பெரிதாகவே இருக்கும்."

"அப்படியானால் சூரியக் கிரணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று இணை கோடுகளாய் இருப்பதாய்ச் சொல்கிறார்களே, எப்படி அது? மாலுமிகள், வானியலாளர்கள் முதலான பலரும் இப்படிதானே சொல்கிறார்கள்."

பேராசிரியர் அடுத்தவரைப் புதிர் போடுமாறுச் சொல்லி இந்த வாக்குவாதத்துக்கு முடிவு கட்டினார்.

8. தீக்குச்சிகள்.—

அடுத்த ஆள் ஒரு தீப்பெட்டியிலிருந்து குச்சிகளை மேஜை மீது கொட்டி அவற்றை மூன்று குவியல்களாய்ப் பிரித்தார்.

"சொக்கப்பனையா கொளுத்தப் போகிறீர்கள்?" என்று கிண்டலாய்க் கேட்டார் ஒருவர்.

"இல்லை, நான் போடப் போகும் மூளைக் குழப்பிப் புதிருக்காக வேண்டும் இது. மொத்தம் 48 குச்சிகள் இருக்கின்றன, இவற்றை சமமில்லா மூன்று குவியல்களாய்ப் பிரித்திருக்கிறேன். ஒவ்வொரு குவியலிலும் குச்சிகள் எத்தனை என்பதைச் சொல்லமாட்டேன். நன்றாய்ப் பாருங்கள். இரண்டாவது குவியலில் எத்தனை குச்சிகள் இருக்கின்றனவோ அத்தனை குச்சிகளை முதல் குவியலிலிருந்து எடுத்து இரண்டாவது குவியலுடன் சேர்க்கிறேன், பிறகு மூன்றாவது குவியலில் எத்தனை குச்சிகள் இருக்கின்றனவோ அத்தனை குச்சிகளை இரண்டாவது குவியலிலிருந்து எடுத்து மூன்றாவதுடன் சேர்க்கி

றேன். முடிவில் முதலாவது குவியலில் எத்தனை குச்சிகள் இருக்கின்றனவோ அத்தனை குச்சிகளை மூன்றாவது குவியலிலிருந்து எடுத்து முதலாவதுடன் சேர்க்கிறேன். இவ்வளவும் செய்ததும் மூன்று குவியல்களிலும் குச்சிகளின் எண்ணிக்கை சமமாகிவிடுகிறது. ஆரம்பத்தில் ஒவ்வொரு குவியலிலும் எத்தனை குச்சிகள் இருந்தன?''

9. அதிசய மரக் கட்டை.—

''நான் போடும் புதிர் முன்பு கிராமக் கணிதப் பண்டிதர் ஒருவர் எனக்கு அளித்த ஒரு கணக்காகும்'' என்று ஆரம்பித்தார் அடுத்தவர். ''உண்மையில் இது ஒரு கணக்கல்ல, தமாஷான கதையாகும். ஒரு விவசாயி ஒரு நாள் காட்டிலே ஒரு கிழவரைச் சந்தித்தான். இருவரும் உரையாடிக் கொண்டிருக்கையில் கிழவர் சொன்னார்:

'இந்தக் காட்டிலே பட்டுப் போன மரம் ஒன்று இருக்கிறது. அது அதிசய சக்தி படைத்தது, உதவி தேவைப்படுவோருக்கு உதவுகிறது.'

'எப்படி உதவுகிறது? நோயைக் குணப்படுத்துகிறதா?'

'அப்படியல்ல, அவரவரிடமும் இருக்கும் பணத்தை அது இரு மடங்காக்கிவிடுகிறது. உனது பணப் பையை அதன் வேர்களுக்கிடையே எறிந்துவிட்டு வந்து நூறு எண்ண வேண்டும்—அவ்வளவுதான்! உடனே பையில் பணம் ஒன்றுக்கு இரண்டாய்க் கூடிவிடுகிறது. அதிசயமான மரக் கட்டை அது!'

'நான் எனது பணப் பையை அங்கே எறிந்து பார்க்கலாமா?' என்று விசாரித்தான் பரபரப்புற்றுவிட்ட அந்த விவசாயி.

'பார்க்கலாமே! ஆனால் நீ கட்டணம் செலுத்த வேண்டும்.'

'யாருக்குச் செலுத்த வேண்டும்? எவ்வளவு செலுத்த வேண்டும்?'

'அந்த மரக் கட்டையை உனக்குக் காட்டுகிறவனுக்கு, அதாவது எனக்குச் செலுத்த வேண்டும்; எவ்வளவு என்பது பேசி முடிவு செய்து கொள்ள வேண்டிய ஒன்று.'

''இருவரும் பேரம் பேச முற்பட்டனர். விவசாயியிடம் அதிகம் பணம் இல்லை என்பது கிழவருக்குத் தெரிந்ததும்,

பணம் இரட்டிப்பாய்ப் பெருகும் ஒவ்வொரு தரமும் விவசாயி தமக்கு 1 ரூபிள் 20 கோப்பெக் கட்டணம் கொடுத்தால் போதும் என்ருர்.

''இருவரும் காட்டுக்குள் நெடுந் தூரம் சென்ருர்கள். நெடுநேரம் தேடியபின் கிழவர் பட்டுப் போன பிர் மரத்தின் அடிக் கட்டை பாசி மூடிப் போய் புதர்களிடையே இருப்பதை விவசாயியிடம் காட்டினுர். பிறகு அவர் விவசாயி கையிலிருந்த பணப் பையை வாங்கி மர வேர்களிடையே எறிந்தார். இருவரும் நூறு எண்ணினர். கிழவர் பணப் பையை வேர்களிடையே தேடியெடுக்க நீண்ட நேரமாயிற்று. தேடியெடுத்த பையை அவர் விவசாயியிடம் திருப்பித் தந்தார்.''

''விவசாயி பையைத் திறந்து பார்த்தான். என்ன அதிசயம்! பணம் ஒன்றுக்கு இரண்டாய்க் கூடியிருந்தது. ஏற்கெனவே ஒத்துக் கொண்டது போல விவசாயி 1 ரூபிள் 20 கோப்பெக்கை எண்ணிக் கிழவரிடம் கொடுத்தான்; பிறகு திரும்பவும் அதிசயம் புரிந்து காட்டும்படிச் சொன்னுன்.

''மீண்டும் இருவரும் நூறு எண்ணினர், கிழவர் மீண்டும் நீண்ட நேரம் தேடிப் பணப் பையை வெளியே எடுத்தார். முன்பு போலவே அதிசயம் நிகழ்ந்திருந்தது—பணம் மீண்டும் ஒன்றுக்கு இரண்டாய்ப் பெருகியிருந்தது. ஒப்பந்தப்படி கிழவருக்கு மீண்டும் 1 ரூபிள் 20 கோப்பெக் கிடைத்தது.

''மூன்ரும் முறையாய்ப் பணப்பையை எறிந்தார் கிழவர், இம்முறையும் பணம் ஒன்றுக்கு இரண்டாய்க் கூடிற்று. ஆனுல் விவசாயி ஒப்பந்தப்படிக் கிழவருக்குத் தர வேண்டிய 1 ரூபிள் 20 கோப்பெக்கை எண்ணிக் கொடுத்ததும் பணப் பையில் பாக்கிக் காசு இருக்கவில்லை. பாவம், விவசாயி தன் பணம் பூராவையும் இழந்துவிட்டான். ஒன்றுக்கு இரண்டாய்ப் பெருகச் செய்து கொள்வதற்கு அவனிடம் இப்போது காசு இல்லை, தலையைத் தொங்கப் போட்டுக் கொண்டு போய்ச் சேர்ந்தான்.

''இரகசியம் எல்லார்க்கும் இப்போது தெளிவாய் விளங்கும்—கிழவர் பணப் பையைத் தேடியெடுப்பதற்கு ஏன் அவ்வளவு நேரமாயிற்று என்பதை நீங்கள் புரிந்து கொண்டிருப்பீர்கள். ஆனுல் நான் உங்களிடம் கேட்கும் கேள்வி வேறொன்று: ஆரம்பத்தில் விவசாயியிடம் இருந்த பணம் எவ்வளவு?''

10. டிசம்பர் மாதம்.—

''தோழர்களே, நான் கணிதவியலாளன் அல்ல'' என்றார் அடுத்தவர். ''மொழியியலே எனக்குரிய துறை. ஆகவே என்னிடமிருந்து கணிதப் புதிரை எதிர்பார்க்கலாகாது. என்னுடைய பணித் துறையுடன் சம்பந்தப்பட்ட வேறொரு வகைக் கேள்வி ஒன்றைக் கேட்கிறேன். ஒரு மாதத்தைப் பற்றிய கேள்வி இது.''

''சரி, கேளுங்கள்.''

''டிசம்பர் மாதம் பன்னிரண்டாவது மாதமாகும். ஆனால் டிசம்பர் என்பதன் மெய்யான அர்த்தம் என்ன தெரியுமா? இந்தச் சொல் ''டெக்கா'' என்னும் கிரேக்கச் சொல்லிலிருந்து உருவானது. கிரேக்கத்தில் 'டெக்கா' என்றால் பத்து என்று பொருள். எனவேதான் பத்து லிட்டருக்கு டெக்காலிட்டர் என்கிறோம், பத்து ஆண்டுக்கு டெக்கேடு என்கிறோம். இந்த 'டெக்கா' என்பதிலிருந்து உருவான டிசம்பரும் பத்தாவது மாதத்தைத்தான் குறிப்பதாய் இருக்க வேண்டும். ஆனால் அது பன்னிரண்டாவது மாதமாய் இருக்கிறது. இந்த விபரீதத்துக்குக் காரணம் என்ன?''

11. கணித வித்தை.—

''நான் ஒரு கணித வித்தை செய்து காட்டுகிறேன், இதை எப்படி என்னால் செய்ய முடிகிறது என்பதை நீங்கள் விளக்க வேண்டும். யாராவது ஒருவர்—பேராசிரியர் அவர்களே, நீங்கள் இதைச் செய்யலாம்—மூன்று இலக்க எண் ஒன்றை எழுதிக் கொள்ளுங்கள்; அந்த எண்ணை நீங்கள் எனக்குச் சொல்ல வேண்டாம்.''

''அதில் சுன்னங்கள் இருக்கலாமா?''

''நான் எவ்விதமான தடையும் விதிக்கவில்லை. நீங்கள் விரும்பும் எந்த மூன்று இலக்கங்களையும் எழுதிக் கொள்ளலாம்.''

''சரி, இதோ மூன்று இலக்க எண் ஒன்றை எழுதிக் கொண்டுவிட்டேன். இனி செய்ய வேண்டியது என்ன?''

''அதன் பக்கத்தில் அதே எண்ணை மீண்டும் எழுதுங்கள். இப்போது உங்களிடம் இருப்பது ஆறு இலக்க எண்ணாகி விட்டது.''

''சரி.''

''காகிதத்தை உங்களுக்கு அடுத்தாற் போல் இருப்பவரிடம் கொடுங்கள். அவர் இந்த ஆறு இலக்க எண்ணை ஏழால் வகுக்கட்டும்.''

''சுலபமாய்ச் சொல்லிவிடுகிறீர்கள், ஆனால் இந்த எண் ஏழால் வகுபடுமோ, என்னமோ.''

''கவலைப்படாதீர்கள், நன்றாய் வகுபடும்.''

''இது என்ன எண் என்று தெரியாது உங்களுக்கு, அது எப்படி அவ்வளவு நிச்சயமாய்ச் சொல்கிறீர்கள்?''

''அதெல்லாம் பிற்பாடு பேசிக் கொள்வோம், வகுங்கள் நீங்கள்.''

''நீங்கள் சொல்வது சரிதான், மீதியில்லாமல் வகுபடுகிறதே.''

''வகுத்து வந்த ஈவை எனக்குத் தெரிவிக்க வேண்டாம், அடுத்தவரிடம் கொடுங்கள். அவர் அந்த ஈவை 11ஆல் வகுக்கட்டும்.''

''இம்முறையும் நீங்கள் சொல்வது போல் வகுபடும் என்றா நினைக்கிறீர்கள்?''

''வகுத்துப் பாருங்கள், மீதி வராது.''

''நீங்கள் சொல்வது சரிதான், வகுபடுகிறது. மேற்கொண்டு செய்ய வேண்டியது என்ன?''

''வகுத்து வந்த ஈவை அடுத்தவரிடம் கொடுங்கள். அதை அவர் 13ஆல் வகுக்கட்டும்.''

''வகுப்பதற்கு நீங்கள் 13ஐத் தேடிப்பிடித்திருக்க வேண்டாம், 13ஆல் வகுபடும் எண்கள் மிகச் சொற்பம்.... நீங்கள் அதிர்ஷ்டசாலிதான், அந்தச் சொற்ப எண்களில் ஒன்றாய் அமைந்திருக்கிறது இது!''

''வகுத்து வந்த ஈவு என் கண்ணில் படாதபடி காகிதத்தை மடித்து என்னிடம் கொடுங்கள்.''

காகிதத்தைப் பிரிக்காமல் அப்படியே அதை அவர் பேராசிரியரிடம் தந்தார்.

''இதோ இருக்கிறது நீங்கள் எழுதிய எண். சரிதானா?''

காகிதத்தைப் பிரித்துப் பார்த்த பேராசிரியர் வியப்புற்றுவிட்டார். ''ஆம், நான் எழுதிய எண் இதுவேதான்.... நல்லது, எல்லாரும் புதிர் போட்டு முடித்தாகிவிட்டது, மழையும் நின்றுவிட்டது. இனி நாம் வெளியே கிளம்பலாம். புதிருக்குரிய விடைகளை இரவில் திரும்பியபின் கூறுவேன். துண்டுக் காகிதங்களை என்னிடம் கொடுங்கள்.''

பதில்கள் 1-11

1. அணிலைப் பற்றிய புதிருக்கு ஏற்கெனவே விளக்கம் அளிக்கப்பட்டுவிட்டதால், அடுத்ததற்குச் செல்வோம்.

2. ஆண்டின் முதலாவது கால் பகுதியில் ஜனவரி 1ஐத் தவிர்த்து ஒரே நாளில் ஐந்து குழுக்களும் கூடியது எத்தனை தரம் என்பதுதான் முதற் கேள்வி. இதற்கு எளிதில் விடை கண்டுவிடலாம். 2, 3, 4, 5, 6 ஆகிய எண்களின் அதமப் பொது மடங்குதான் இக்கேள்விக்குரிய விடை. இந்த ஐந்து எண்களின் அதமப் பொது மடங்கு 60ஆகும். ஆகவே ஜனவரி 1க்குப் பிற்பாடு ஐந்து குழுக்களும் திரும்பவும் ஒருங்கே கூடும் நாள் 61ஆவது நாளாகும். அரசியல் குழு 30 இரண்டு-நாளைய இடைவெளிக்குப் பிற்பாடும், இலக்கியக் குழு 20 மூன்று-நாளைய இடைவெளிக்குப் பிற்பாடும், புகைப்படக் குழு 15 நான்கு-நாளைய இடைவெளிக்குப் பிற்பாடும், சதுரங்கக் குழு 12 ஐந்து-நாளைய் இடைவெளிக்குப் பிற்பாடும், பாட்டுக் குழு 10 ஆறு-நாளைய இடைவெளிக்குப் பிற்பாடும் கூடும். இந்த 61ஆவது நாளன்று எல்லாமாகக் கூடும். அதாவது 60 நாட்களுக்கு ஒரு தரம்தான் ஐந்து குழுக்களும் ஒரே நாளில் கூட முடியும். அவ்வாண்டின் முதலாவது கால் பகுதியில் 90 நாட்கள் இருப்பதால், ஜனவரி 1ஐத் தவிர்த்து இந்தக் காலாண்டுப் பகுதியில் ஐந்து குழுக்களும் எல்லாமாய்க் கூடும் நாள் ஒன்றே ஒன்றுதான் இருக்க முடியும்.

முதலாவது காலாண்டுப் பகுதியில் எந்தக் குழுவும் கூடாத நாட்கள் எத்தனை?—இது இரண்டாவது கேள்வி· முதலாவது கேள்வியைப் போல் அவ்வளவு சுலபமாய் இதற்கு விடை கண்டுவிட முடியாது. இதற்கு விடை காண 1லிருந்து 90 வரை எல்லா எண்களையும் வரிசையாய் எழுத வேண்டும். பிறகு அரசியல் குழு கூடும் எல்லா நாட்களையும் (அதாவது, 1, 3, 5, 7, 9... இப்படி அமைந்த எல்லா நாட்களையும்) கோடிட்டு அடித்தாக வேண்டும். இதன்பின் இலக்கியக் குழு கூடும் எல்லா நாட்களையும் (அதாவது 1, 4, 7, 10...இப்படி அமைந்த எல்லா நாட்களையும்) கோடிட்டு அடித்தாக வேண்டும். இதே போல புகைப்படக் குழுவும் சதுரங்கக் குழுவும்

பாட்டுக் குழுவும் கூடும் நாட்களையும் அடித்தாக வேண்டும். அடிக்காமல் முடிவில் எஞ்சியிருக்கும் எண்கள் எந்தக் குழுவும் கூடாத நாட்களைக் குறிப்பவை.

இதைச் செய்து பாருங்கள், இம்மாதிரி நாட்கள் 24 இருக்கக் காண்பீர்கள்—ஜனவரியில் எட்டு நாட்களும் (அதாவது, 2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30ஆம் தேதிகள்), பிப்ரவரியில் ஏழு நாட்களும், மார்ச்சில் ஒன்பது நாட்களுமாய் மொத்தம் 24 நாட்கள் இருக்கும்.

3. இருவரும் எண்ணும் பாதசாரிகளின் எண்ணிக்கை ஒன்றாகவே இருக்கும். வாயிற் கதவுக்கு முன்னால் நிற்பவர் இரு திசைகளிலும் போகும் பாதசாரிகளை எண்ணிச் செல்வார், ஆனால் நடைபாதையில் மேலும் கீழுமாய் நடப்பவர் தாம் சந்திப்பவர்களை எண்ணிச் செல்வார்.

4. இந்தப் புதிரில் ஏதோ தவறு இருப்பதாய் முதலில் நினைக்கத் தோன்றும், தாத்தாவுக்கும் பேரனுக்கும் ஒரே வயது என்பதாய் இந்தப் புதிர் கூறுவது போல் தோன்றும். ஆனால் புதிரில் தவறு ஏதும் இல்லை.

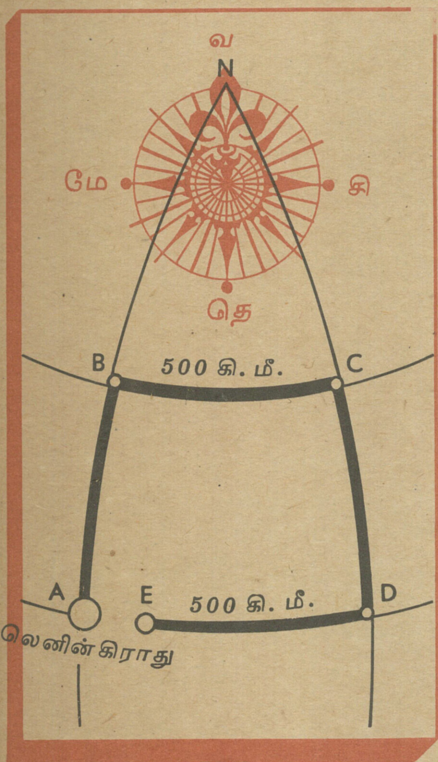
பேரன் 20ஆம் நூற்றாண்டில் பிறந்தவனாகவே இருக்க வேண்டுமென்பது கூறாமலே விளங்குகிறது. ஆகவே பேரன் பிறந்த ஆண்டின் முதல் இரு இலக்கங்களும் 19ஆகவே (நூறுகளின் எண்ணிக்கை) இருக்க வேண்டும். அடுத்த இரு இலக்கங்களை இரு மடங்கு ஆக்கிக் கிடைக்கும் பெருக்குத் தொகை 32 ஆகும். ஆகவே இந்த எண் 16. பேரன் பிறந்த ஆண்டு 1916; 1932ல் அவனுக்கு வயது 16.

தாத்தா 19ஆம் நூற்றாண்டில் பிறந்தவராகவே இருக்க வேண்டும். ஆகவே அவரது பிறந்த ஆண்டின் முதல் இரு இலக்கங்கள் 18. எஞ்சிய இரு இலக்கங்களை இரு மடங்கு ஆக்கினால் கிடைக்கும் பெருக்குத் தொகை 132ஆதல் வேண்டும். ஆகவே எஞ்சிய இந்த இரு இலக்கங்கள் 132ல் பாதியாகும், அதாவது 66 ஆகும். தாத்தா பிறந்த ஆண்டு 1866; 1932ல் அவருக்கு வயது 66.

இவ்வாறு 1932ல் பேரனின் வயதும், தாத்தாவின் வயதும் அவர்களுடைய பிறந்த ஆண்டுகளின் கடைசி இரு இலக்கங்களுக்குச் சமமாய் இருந்தன.

5. 25 நிலையங்களில் ஒவ்வொன்றிலும் வந்து ஏறும் பயணிகள் ஏனைய 24 நிலையங்களில் எதற்கு வேண்டுமானாலும் டிக்கெட்டு வாங்கலாம். ஆகவே டிக்கெட்டு வகைகளின் எண்ணிக்கை $25 \times 24 = 600$.

6. இந்தப் புதிரில் முரண்பாடு ஏதும் இல்லை. ஆகாயக் கப்பல் பறக்கும் பாதை சதுரமல்ல. பூமி உருண்டையானது, நெட்டாங்குகள் (meridians) பூமியின் துருவங்களில் ஒன்றுகுவிகின்றன என்பதை நினைவில் கொள்ள வேண்டும். லெனின்கிராது அகல வரைக்கு (latitude) இணை திசையில், லெனின்கிராதிலிருந்து 500 கிலோமீட்டர் வடக்கே 500 கிலோமீட்டர் செல்லும் ஆகாயக் கப்பல், கிழக்கு நோக்கிக் கடந்த டிகிரி எதிர்த் திசையில் இதே லெனின்கிராது அகலவரையில் கடந்ததை விட அதிகமாகும். ஆகவே இந்த ஆகாயக் கப்பலின் பயணம் லெனின்கிராதுக்குக் கிழக்கில் முடிவடைந்துவிடுகிறது.



படம் 2.

எத்தனை கிலோமீட்டர் கிழக்கில்? இதை நாம் கணக்கிட்டுச் சொல்லமுடியும். ஆகாயக் கப்பல் சென்ற பாதையை படம் 2 காட்டுகிறது: ABCDE. N வடதுருவமாகும்; AB, DC நெட்டாங்குகள் இங்கு ஒன்றுசேருகின்றன. கப்பல் முதலில் வடதிசையில், அதாவது AN நெட்டாங்கு வழியே 500 கிலோமீட்டர் சென்றது. ஒரு டிகிரி நெட்டாங்கு 111 கிலோமீட்டர் ஆகுமாதலால், 500 கிலோமீட்டர் நீளமுள்ள வில் $AB = 500 \div 111 \approx 4°5'$. லெனின்கிராது 60ஆவது அகல வரையில் இருக்கிறது. ஆகவே B இருப்பது $60° + 4°5' = 64°5'$ அகலவரையில். Bயிலிருந்து கப்பல் கிழக்கு நோக்கி BC

அகலவரையில் 500 கிலோமீட்டர் சென்றது. இந்த அகல வரையில் ஒரு டிகிரியின் நீளம் எவ்வளவு என்பதைக் கணக்கிட முடியும் (அல்லது அட்டவணையிலிருந்து கண்டறிந்துகொள்ள லாம்), இது 48 கிலோமீட்டராகும். எனவே கப்பல் கிழக்கு நோக்கி எத்தனை டிகிரி சென்றது என்பதைக் கணிக்கலாம்: $500 \div 48 \approx 10°4'$. பிறகு கப்பல் தெற்கு நோக்கி CD நெட்டாங்கில் 500 கிலோமீட்டர் பறந்து லெனின்கிராது அகலவரைக்குத் திரும்பிற்று. இதன்பின் அது மேற்கு நோக்கி AD வழியே பறந்தது. இவ்வழியில் அது பறந்த 500 கிலோமீட்டர் ADஐ விட குறைவாகும் என்பது விளங்குகிறது. ADயில் எத்தனை டிகிரிகளோ அத்தனை டிகிரிகள் BCயிலும் இருக்கின்றன; அதாவது $AD = BC = 10°4'$. ஆனால் 60ஆவது அகலவரையில் $1° = 55.5$ கிலோமீட்டர். ஆகவே $AD = 55.5 \times 10.4 \approx 577$ கிலோமீட்டர். ஆகாயக் கப்பல் லெனின்கிராதுக்குத் திரும்பிவந்து தரையிறங்கியிருக்க முடியாது என்பது விளங்கிறது. லெனின்கிராதுக்குக் கிழக்கே 77 கிலோமீட்டர் தொலைவில், லதோகா ஏரியிலேதான் அது இறங்கியிருக்க முடியும்.

7. சூரியக் கிரணங்கள் விரிந்து பரவுவதாய்ச் சொல்வது சரியல்ல. சூரியனிடமிருந்து பூமிக்குள்ள தொலைவுடன் ஒப்பிடுகையில் பூமியானது மிக மிகச் சிறியது, ஆகவே புவிப் பரப்பின் ஒரு பகுதியில் விழும் சூரியக் கிரணங்களிடையே நிலவும் கோணம் கவனியாது விட்டுவிடத் தக்க அளவுக்குச் சொற்பமானதாகும், இக்கிரணங்கள் உண்மையில் ஒன்றுக்கொன்று இணைவாய் இருப்பதாய்க் கொள்ளலாம். சில சந்தர்ப்பங்களில் இவை விசிறிபோல் விரிந்து பரவுவதாய்த் தோன்றுவது மெய்தான் (உதாரணமாய் மேகத்துக்குப் பின்னாலிருந்து சூரியன் பிரகாசிக்கையில் இப்படித் தோன்றுகிறது, படம் 1). ஆனால் இது பார்வைத் தோற்றமே (perspective) அன்றி வேறல்ல.

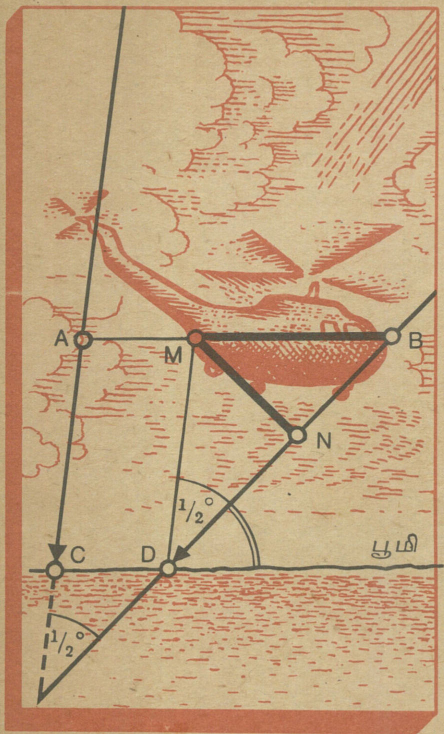
இணை கோடுகள் நெடுந் தூரம் ஓடுகையில் தொலைவில் ஒரு புள்ளியில் ஒன்றுசேர்வதாய்க் கண்ணுக்குத் தெரிகின்றன (உதாரணம்: இருப்புப் பாதை அல்லது நெடுஞ் சாலை, படம் 3).

ஆனால் சூரியக் கிரணங்கள் இணை கிரணங்களாய்த் தரை மீது பாய்கின்றன என்பதால், ஆகாயக் கப்பலின் நிறை நிழல்

படம் 3.

(umbra) அக்கப்பலைப் போல் அதே நீளமுடையதாகு மென்று அர்த்தமல்ல. ஆகாயக் கப்பலின் நிறை நிழல் புவிப் பரப்பை நோக்கிச் செல்லுகையில் விசும்பில் குறுகிச் செல் வதை படம் 4 காட்டுகிறது; ஆகவே கப்பலின் நிழல் கப்பலைக் காட்டிலும் குறுகலாய் இருக்க (ABஐவிட CD குறுகலாய் இருக்க) காண்கிறோம்.

ஆகாயக் கப்பல் பறக்கும் உயரம் தெரியுமாயின், ABக்கும் CDக்கும் உள்ள வித்தியாசத்தைக் கணக்கிடமுடியும். கப்பல் பறக்கும் உயரம் 1,000 மீட்டர் என்பதாய்க் கொள் வோம். ACக்கும் BDக்கும் உள்ள கோணம் பூமியிலிருந்து பார்க்கையில் சூரியனது கோணத்துக்குச் சமம். இந்தக் கோணம் $1/2^\circ$ ஆகும் என்பது நமக்குத் தெரியும். கண்ணுக்கும் $1/2^\circ$ கோணத்தில் பார்க்கப்படும் ஒரு பொருளுக்குமுள்ள தூரம் அப்பொருளின் விட்டத்தைப் போல் 115 மடங்காகும் என்பதும் நமக்குத் தெரியும். ஆகவே வெட்டுத் துண்டு MN (புவிப் பரப்பிலிருந்து $1/2^\circ$ கோணத்தில் பார்க்கப்படும் துண்டாகும்) ACயில் 1/115 பங்காய் இருக்க வேண்டும். புள்ளி Aக்கும் புவிப் பரப்புக்கும் இடையிலுள்ள நேர்குத்துத்



படம் 4.

தூரத்தைக் காட்டிலும் AC நீளமானது. சூரியக் கிரணங்களுக்கும் புவிப் பரப்புக்குமுள்ள கோணம் 45°ஆகுமாயின், ACயின் நீளம் (ஆகாயக் கப்பல் *1,000* மீட்டர் உயரத்தில் இருப்பதாய்க் கொண்டால்) சுமார் *1,400* மீட்டராகும், எனவே வெட்டுத் துண்டு $MN = 1{,}400 \div 115 = 12$ மீட்டர்.

ஆனல் ஆகாயக் கப்பலுக்கும் அதன் நிழலுக்குமுள்ள வித்தியாசம் வெட்டுத் துண்டு MB ஆகும்; இது MNஐக் காட்டிலும் பெரியது (*1.4* மடங்கு பெரிது); ஏனெனில் கோணம் MBD ஏறத்தாழ 45° ஆகும். எனவே $MB = 12 \times 1.4 =$ ஏறத்தாழ *17* மீட்டர்.

ஆகாயக் கப்பலின் தெளிவான கரிய நிழலாகிய நிறை நிழலுக்கே இவை யாவும் பொருந்தும்; அரைகுறையான வெளிறிய நிழலாகிய புறநிழலுக்கு (penumbra) இவை பொருந்தா.

ஆகாயக் கப்பலுக்குப் பதிலாய்ச் சுமார் *17* மீட்டர் விட்டமுள்ள ஒரு பலூன் இருக்குமாயின், நிறை நிழல் விழாது என்பது நமது கணக்கிலிருந்து விளங்குகிறது. மங்கலான புறநிழல் மட்டுமே விழும்.

8. முடிவிலிருந்து ஆரம்பித்து இந்தக் கணக்கிற்கு விடை காணலாம். யாவும் செய்து முடிக்கப்பட்ட பின் ஒவ்வொரு குவியலிலும் தீக்குச்சிகளின் எண்ணிக்கை சமமாகிவிடுகிறது. எல்லாக் குவியல்களிலுமாய்ச் சேர்ந்து மொத்தம் உள்ள தீக்குச்சிகளின் எண்ணிக்கை (*48*) மாறிவிடவில்லை. ஆகவே ஒவ்வொரு குவியலிலும் முடிவில் *16* குச்சிகள் இருந்திருக்க வேண்டும்.

ஆக, முடிவில் இருக்கும் நிலைவரம் என்னவெனில்:

முதற் குவியல்	இரண்டாம் குவியல்	மூன்றும் குவியல்
16	16	16

இதற்கு முன்பு நாம் முதற் குவியலில் எத்தனை குச்சிகள் இருந்தனவோ அத்தனை குச்சிகளை அதனுடன் சேர்த்தோம்; அதாவது, குச்சிகளின் எண்ணிக்கையை இரு மடங்காக்கிறோம். ஆகவே இந்தக் கடைசிச் செயலுக்கு முன்பு முதலாவது குவியலில் 8 குச்சிகளே இருந்திருக்க வேண்டும். 8 குச்சிகள் மூன்றுவது குவியலிலிருந்து எடுக்கப்பட்டன, ஆகவே மூன்றுவது குவியலில் இருந்திருக்க வேண்டிய குச்சிகள்:

$$16 + 8 = 24.$$

இப்போது குவியல்களில் குச்சிகளின் எண்ணிக்கை வருமாறு:

முதற் குவியல்	இரண்டாம் குவியல்	மூன்றும் குவியல்
8	16	24

இதற்கு முன்பு மூன்றுவது குவியலில் எத்தனை குச்சிகள் இருந்தனவோ அத்தனை குச்சிகளை இரண்டாவதிலிருந்து எடுத்து மூன்றுவதுடன் சேர்த்தோம். ஆகவே மூன்றுவதில் ஆரம்பத்தில் இருந்த குச்சிகளுடைய எண்ணிக்கையின் இரட்டிப்பு மடங்கு 24க்குச் சமம் என்றுகிறது. எனவே முதலாவது செயலுக்குப் பிற்பாடு ஒவ்வொரு குவியலிலும் இருந்த குச்சிகள் வருமாறு:

முதற் குவியல்	இரண்டாம் குவியல்	மூன்றும் குவியல்
8	$16 + 12 = 28$	12

முதலாவது செயல் என்னவெனில், இரண்டாம் குவியலில் எத்தனை குச்சிகள் இருந்தனவோ அத்தனை குச்சிகளை முதற் குவியலிலிருந்து எடுத்து இரண்டாவதுடன் சேர்த்தோம். ஆகவே ஆரம்பத்தில் மூன்று குவியல்களிலும் இருந்த குச்சிகளின் விவரம்:

முதற் குவியல்	இரண்டாம் குவியல்	மூன்றும் குவியல்
22	14	12

9. இந்தப் புதிரையும் இறுதியிலிருந்து ஆரம்பித்து விடுவிப்பது தான் உத்தமம். மூன்றும் தடவையாய் ஒன்றுக்கு இரண்டாய்ப் பணம் பெருகிய போது, விவசாயினுடைய பணப் பையில் இருந்தது 1 ரூபிள் 20 கோப்பெக் என்பது நமக்குத் தெரியும் (கடைசி தடவையாய்க் கிழவர் பெற்றுக் கொண்ட கட்டணமே இது). இதற்கு முன்பு பணப் பையில் இருந்திருக்க வேண்டிய பணம் எவ்வளவு? 60 கோப்பெக்குதான் இருந்திருக்க வேண்டும். இரண்டாம் தடவையாய் விவசாயி 1 ரூபிள் 20 கோப்பெக் கட்டணத்தைக் கிழவருக்குத் தந்தபின் பணப் பையில் எஞ்சிய தொகை இது. ஆகவே இரண்டாம் தடவை கட்டணம் செலுத்துவதற்கு முன்பு பணப் பையில் இருந்திருக்க வேண்டிய பணம்:

$$1.20 + 0.60 = 1.80.$$

இந்த 1 ரூபிள் 80 கோப்பெக் இரண்டாம் தடவை பணம் ஒன்றுக்கு இரண்டாய்ப் பெருகியபின் பணப் பையில் இருந்ததாகும். இப்படிப் பெருகுவதற்கு முன்பு பையில் 90 கோப்பெக்கே இருந்திருக்க வேண்டும்: முதல் தடவையாய் கிழவருக்கு 1 ரூபிள் 20 கோப்பெக் கட்டணம் தந்தபின் எஞ்சிய தொகையே இந்த 90 கோப்பெக். ஆகவே முதலாவது தரம் கட்டணம் செலுத்துவதற்கு முன்பு $0.90 + 1.20 = 2.10$ இருந்திருக்க வேண்டும். இந்தத் தொகை முதலாவது முறை பணம் இரட்டிப்பான பிறகு பையில் இருந்ததாகும். ஆகவே தொடக்கத்தில் இதில் பாதிப் பணமே, அதாவது 1 ரூபிள் 5 கோப்பெக்கே பையில் இருந்திருக்க வேண்டும். சடுதியில் செல்வந்தனுகலாமென்று ஆரம்பித்து தோல்வி

யுற்ற விவசாயியிடம் தொடக்கத்தில் இருந்த தொகை இதுவே. கணக்கைச் சரி பார்ப்போம்:

பையில் இருந்த பணம்:

முதல் தரம் இரட்டிப்பான பிறகு	1.05×2	$= 2.10$
முதல் கட்டணம் செலுத்தியபின்	$2.10 - 1.20$	$= 0.90$
இரண்டாம் தரம் இரட்டிப்பான பிறகு	0.90×2	$= 1.80$
இரண்டாம் கட்டணம் செலுத்தியபின்	$1.80 - 1.20$	$= 0.60$
மூன்றும் தரம் இரட்டிப்பான பிறகு	0.60×2	$= 1.20$
மூன்றும் கட்டணம் செலுத்தியபின்	$1.20 - 1.20$	$= 0$

10. இன்று நாம் உபயோகிக்கும் நாட்குறி முறை ஆதி ரோமானியர்களிடமிருந்து பெறப்பட்டதாகும். ஜூலியஸ் சீசருக்கு முன்பு வழக்கிலிருந்த முறையின்படி மார்ச்சு மாதமே ஆண்டின் முதல் மாதமாகும். அப்போது டிசம்பர் பத்தாவது மாதமாயிருந்தது. பிற்பாடு புத்தாண்டு தினம் ஜனவரி முதல் நாளுக்கு மாற்றப்பட்டது, ஆனல் மாதங்களின் பெயர் இதற்கேற்ப மாற்றப்படவில்லை. இதனுல்தான் சில மாதங்களுடைய பெயர்களின் அர்த்தம் ஒன்றுகவும், ஆண்டில் அம்மாதங்களது வரிசை எண் வேருென்றுகவும் ஆகிவிட்டது:

மாதம்	அர்த்தம்	வரிசை எண்
செப்டம்பர்	(செப்டம்—ஏழு)	ஒன்பதாவது
அக்டோபர்	(அக்டோ—எட்டு)	பத்தாவது
நவம்பர்	(நவம்—ஒன்பது)	பதினென்றுவது
டிசம்பர்	(டெக்கா—பத்து)	பன்னிரண்டாவது

11. பேராசிரியர் ஆதியில் எழுதிக் கொண்ட மூன்று இலக்க எண்ணுக்குச் செய்யப்படுவதை வரிசையாய்க் கவனித்துச் செல்வோம். முதலில் அந்த எண்ணின் பக்கத்தில் அதே எண் எழுதப்படுகிறது. ஒரு எண்ணை 1,000த்தால் பெருக்கி, அதே எண்ணை இந்தப் பெருக்குத் தொகையுடன் கூட்டுவதற்குச் சமமாகும் இந்தச் செயல்; உதாரணம்:

$$8{,}72{,}872 = 8{,}72{,}000 + 872.$$

ஆக, உண்மையில் இங்கு நாம் செய்தது என்னவெனில், எழுதிய மூன்று இலக்க எண்ணை 1,001ஆல் பெருக்கினேம்:

இதன்பின் என்ன செய்தோம்? வரிசையாய் 7, 11, 13 ஆகியவற்ருல் வகுத்தோம், அதாவது $7 \times 11 \times 13$, அல்லது 1,001ஆல் வகுத்தோம்.

முதலில் எழுதிய எண்ணை இவ்விதம் நாம் 1,001ஆல் பெருக்கி, பிறகு இதே 1,001ஆல் வகுத்தோம். எழுதிய எண்ணே திரும்பவும் வரத்தானே செய்யும்?

* * *

விடுமுறை இல்லத்தில் போடப்பட்ட புதிர்கள் பற்றிய இந்த அத்தியாயத்தை முடிக்குமுன் உங்களுக்கு மேலும் இரண்டு கணித வித்தைகளைக் கூற விரும்புகிறேன். முதலாவது வித்தையில் எண்கள் ஊகித்துத் கூறப்படுகின்றன, இரண்டாவதில் எது யாரிடம் இருக்கிறதென்று கண்டு பிடித்துச் சொல்லப்படுகிறது.

இந்த வித்தைகள் மிகவும் பழமையானவை; நீங்கள் நன்கு அறிந்த வித்தைகளாய் இருக்கலாம். ஆனுல் இவை எந்த அடிப்படையின் மீது அமைந்தவை என்று எல்லாருக்கும் தெரியுமா என்பது சந்தேகம்தான். வித்தைகளின் தத்துவார்த்த அடிப்படை தெரியாதவரை நீங்கள் அவற்றின் மர்மத்தைப் புரிந்து கொள்ளாதவர்களே. இயற் கணிதம் பற்றிய ஆரம்ப அறிவு இருந்தாலே போதும், இந்த வித்தைகளின் விளக்கத்தை நீங்கள் புரிந்து கொண்டுவிடலாம்.

12. அடிக்கப்பட்ட இலக்கம்.—

பல இலக்கங்களைக் கொண்ட எண் ஒன்றை எழுதிக் கொள்ளலாம், ஆனுல் சுன்னங்களில் முடிவுறும் எண்ணுய் இருக்கக் கூடாது என்று உங்கள் நண்பரிடம் சொல்லுங்கள் (உதாரணமாய் 847 போன்ற ஓர் எண்ணை எழுதிக் கொள்கிறரெனக் கொள்வோம்). அந்த எண்ணிலுள்ள மூன்று இலக்கங்களையும் கூட்டி வரும் கூட்டுத் தொகையை $(8 + 4 + 7 = 19)$ அவ்வெண்ணிலிருந்து கழித்துக் கொள்ளச் சொல்லுங்கள். இதன் விளைவு:

$$847 - 19 = 828.$$

வருகிற விடையில் எந்தவொரு இலக்கத்தையும் அடித்து விட்டு எஞ்சியுள்ள இரண்டு இலக்கங்களைச் சொல்லும்படிக் கூறுங்கள். உங்கள் நண்பன் ஆரம்பத்தில் எழுதிக் கொண்ட எண் உங்களுக்குத் தெரியாது. அதிலிருந்து அவன் கழித்த எண்ணும் உங்களுக்குத் தெரியாது, ஆயினும் அவன் அடித்த இலக்கம் என்னவென்பதை நீங்கள் கூறிவிடுகிறீர்கள்.

எப்படி இது?

எளிதில் கூறிவிடலாம்: நீங்கள் செய்ய வேண்டியது எல்லாம், உங்களுக்குத் தெரிந்த இரு இலக்கங்களுடன் எந்த இலக்கத்தைக் கூட்டினால் 9ஆல் வகுபடும் அண்மை எண் கிடைக்கும் என்று கணக்கிட வேண்டியதுதான். உதாரணமாய், 828ல் உங்கள் நண்பன் முதலாவது இலக்கத்தை (8) அடித்துவிட்டு எஞ்சியுள்ள இரு இலக்கங்களையும் (2, 8) உங்களிடம் சொல்வானாயின், நீங்கள் இவ்விரு இலக்கங்களையும் கூட்டுகிறீர்கள்; கிடைக்கும் கூட்டுத் தொகை 10. 9ஆல் வகுபடும் அண்மை எண் 18. ஆகவே உங்கள் நண்பன் அடித்த இலக்கம் 8.

எப்படி இது? எண் எதுவாயினும் அதன் இலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகையை அவ்வெண்ணிலிருந்து கழித்தபின் கிடைக்கும் மீதி எப்போதும் 9ஆல் வகுபடக் கூடியதாகவே இருக்கும். இயற் கணித முறைப்படி, நூறுகளின் எண்ணிக்கையை a என்றும், பத்துகளின் எண்ணிக்கையை b என்றும், ஒன்றுகளின் எண்ணிக்கையை c என்றும் வைத்துக் கொள்வோம். இந்த எண்ணின் மதிப்பு:

$$100a + 10b + c \text{ ஆகும்.}$$

இந்த எண்ணிலிருந்து இதன் இலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகையை $(a+b+c)$ கழித்து வரும் மீதி:

$$100a + 10b + c - (a+b+c) = 99a + 9b = 9(11a+b).$$

$9(11a+b)$ தெளிவாகவே 9ஆல் வகுபடும் எண்தான். இவ்விதம் எந்த எண்ணிலிருந்தும் அவ்வெண்ணின் இலக்கங்களது கூட்டுத் தொகையைக் கழித்து வரும் மீதி எப்போதுமே 9ஆல் வகுபடுவதாகவே இருக்கும்.

உங்கள் நண்பன் கூறும் இலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகையே 9ஆல் வகுபடுவதாய் இருக்கக் கூடும் (உதாரணம்: 4உம், 5உம்). உங்கள் நண்பன் அடித்த இலக்கம் 0 அல்லது 9

ஆகுமென்பது இதிலிருந்து தெரிய வருகிறது; அப்போது நீங்கள் அடிக்கப்பட்ட இலக்கம் 0 அல்லது 9 என்று கூற வேண்டும்.

இதே வித்தையை இன்னொரு விதத்திலும் செய்யலாம்: எழுதப்பட்ட எண்ணிலிருந்து அதன் இலக்கங்களது கூட்டுத் தொகையைக் கழித்துக் கொள்ள சொல்வதற்குப் பதில், அதே எண்ணை உங்கள் நண்பனின் விருப்பம் போல் எப்படி வேண்டுமானாலும் மாற்றிப் போட்டுக் கழித்துக் கொள்ளச் சொல்லுங்கள். எடுத்துக்காட்டாய், உங்கள் நண்பன் எழுதிக் கொள்ளும் எண் 8,247 ஆகுமாயின், அதிலிருந்து அவன் 2,748ஐ கழிக்கலாம் (மாற்றிப்போடப்பட்ட எண் முதலாவது எண்ணைவிட பெரிதாய் இருந்தால், அதிலிருந்து முதலாவது எண்ணைக் கழிக்க வேண்டும்). இதன்பின் மேலே கூறியது போலவே யாவற்றையும் செய்ய வேண்டும்: $8{,}247 - 2{,}748 = 5{,}499$. அடிக்கப்படும் இலக்கம் 4 ஆகுமாயின், ஏனைய மூன்று இலக்கங்களும் (5உம், 9உம், 9உம்) அறிவிக்கப்படும், இவற்றைக் கூட்டியதும் 23 கிடைக்கிறது. 9ஆல் வகுபடும் அண்மை எண் 27. ஆகவே அடிக்கப்பட்ட இலக்கம்: $27 - 23 = 4$.

13. எது யாரிடம் இருக்கிறது? —

இந்த அரிய வித்தைக்கு சட்டைப் பைக்குள் வைத்துக் கொள்ளக் கூடிய மூன்று சிறு பொருள்கள்—பென்சில், சாவி, பேனாக்கத்தி போன்றவை—வேண்டும். மற்றும் மேஜைமீது ஒரு தட்டில் 24 கொட்டைகளை—டிராப்டுக் காய்கள், டோமினோ வில்லைகள், அல்லது தீக்குச்சிகளாகவும் இருக்கலாம்—வைத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

உங்கள் மூன்று நண்பர்களில் ஒவ்வொருவரும் மூன்று பொருள்களில் ஏதேனும் ஒன்றை எடுத்துத் தமது சட்டைப் பைக்குள் வைத்துக் கொள்ளச் சொல்லுங்கள். நீங்கள் அறையிலிருந்து வெளியே சென்றுவிட வேண்டும், உங்களுக்குத் தெரியாமல் ஒவ்வொருவரும் ஒரு பொருளைச் சட்டைப் பையில் போட்டுக் கொள்ள வேண்டும். நீங்கள் அறைக்குத் திரும்பி வந்ததும் எந்தப் பொருள் யாரிடம் இருக்கிறது என்று ஊகித்துச் சொல்கிறீர்கள்.

இதற்குரிய முறை வருமாறு: ஒவ்வொருவரும் ஒரு பொருளை சட்டைப் பைக்குள் மறைத்து வைத்துக் கொண்ட

தும் நீங்கள் அறைக்குத் திரும்பி வந்து, தட்டிலுள்ள கொட்டைகளில் ஒன்றை எடுத்து முதல் ஆளிடமும், இரண்டை எடுத்து இரண்டாம் ஆளிடமும், மூன்றை எடுத்து மூன்றும் ஆளிடமும் தருகிறீர்கள். பென்சிலை வைத்திருப்பவர் எத்தனை கொட்டைகள் பெற்றுக் கொண்டாரோ அதே அளவு கொட்டைகளையும், சாவியை வைத்திருப்பவர் பெற்றுக் கொண்டதைப் போல் இரு மடங்கு கொட்டைகளையும், பேனாக் கத்தியை வைத்திருப்பவர் பெற்றுக் கொண்டதைப் போல் நான்கு மடங்கு கொட்டைகளையும் தட்டிலிருந்து எடுத்துக் கொள்ள வேண்டுமென்று சொல்லிவிட்டு நீங்கள் மீண்டும் வெளியே செல்கிறீர்கள். மூவரும் எடுத்துக் கொள்வது போக மீதிக் கொட்டைகள் தட்டிலே இருக்க வேண்டுமென்று அவர்களிடம் கூறிச் செல்கிறீர்கள்.

இதை அவர்கள் செய்து முடித்ததும் உங்களை அறைக்குள் திரும்பி வரும்படி அழைக்கிறார்கள். நீங்கள் உள்ளே வந்து தட்டில் எஞ்சியுள்ள கொட்டைகளைப் பார்க்கிறீர்கள், உடனே உங்கள் நண்பர்களிடம் எது யாரிடம் இருக்கிறது என்று அறிவிக்கிறீர்கள்.

இரகசியமாய் உங்களுக்கு ஜாடை காட்டக் கூடிய உதவியாளர் யாருமின்றி தனி ஆளாய் நீங்கள் இந்த வித்தையைச் செய்கிறீர்கள், உங்கள் நண்பர்கள் திகைத்துப் போகிறார்கள். உண்மையில் இதில் மந்திரமும் இல்லை, மாயமும் இல்லை—கணக்கீட்டின் அடிப்படையிலேயே ஊகித்து அறிந்து கொள்கிறீர்கள். தட்டில் எஞ்சியிருக்கும் கொட்டைகளின் எண்ணிக்கையைக் கொண்டு எது யாரிடம் இருக்கிறது என்று ஊகித்துவிடுகிறீர்கள். தட்டில் கொட்டைகள் அதிகம் எஞ்சியிருப்பதில்லை—ஒன்றிலிருந்து ஏழு கொட்டைகளுக்குள்தான் இருக்கும், தட்டைப் பார்த்ததுமே அதிலுள்ள கொட்டைகளின் எண்ணிக்கை தெரிந்து விடுகிறது.

எது யாரிடம் இருக்கிறது என்று எப்படி உங்களால் கூற முடிகிறது?

எளிதிலும் எளிது. மூன்று பொருள்களாலான வெவ்வேறு அடுக்கு ஒவ்வொன்றுக்கும் ஏற்ப தட்டில் வெவ்வேறு எண்ணிக்கையில் கொட்டைகள் எஞ்சியிருக்கின்றன. இதன் விளக்கம் வருமாறு.

உங்களது மூன்று நண்பர்களையும் முறையே D, E, F என்பதாய்க் குறிப்பிடலாம். மூன்று பொருள்களாவன: பென்சில்—a, சாவி—b, பேனுக்கத்தி—c. இம்மூன்று பொருள்களை மூன்று நண்பர்களிடம் 6 வழிகளில் ஏதேனும் ஒன்றில்தான் வினியோகிக்க முடியும்:

D	E	F
a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

சாத்தியமான எல்லாக் கோவைகளும் இந்த அட்டவணையில் அடங்கிவிடுகின்றன—இந்த ஆறைத் தவிர வேறு கோவை எதுவும் இருக்க முடியாது.

ஒவ்வொரு கோவைக்கும் ஏற்ப தட்டில் எஞ்சும் கொட்டைகளின் எண்ணிக்கை வருமாறு:

DEF	எடுக்கப்பட்ட கொட்டைகளின் எண்ணிக்கை	மொத்தம்	மீதி
abc	$1+1=2;\ 2+4=6;\ 3+12=15$	23	1
acb	$1+1=2;\ 2+8=10;\ 3+6=9$	21	3
bac	$1+2=3;\ 2+2=4;\ 3+12=15$	22	2
bca	$1+2=3;\ 2+8=10;\ 3+3=6$	19	5
cab	$1+4=5;\ 2+2=4;\ 3+6=9$	18	6
cba	$1+4=5;\ 2+4=6;\ 3+3=6$	17	7

தட்டில் எஞ்சும் கொட்டைகளின் எண்ணிக்கை ஒவ்வொரு தரமும் வெவ்வேருய் இருப்பதைக் கவனியுங்கள். இந்த எண்ணிக்கை தெரிந்ததும் எது யாருடைய சட்டைப் பையில் இருக்கிறது என்பதை நீங்கள் எளிதில் கூறிவிடலாம். திரும்பவும் நீங்கள், மூன்ருவது முறையாய், அறையிலிருந்து

வெளியே போகிறீர்கள், மேற்கண்ட அட்டவணையை நீங்கள் எழுதி வைத்திருக்கும் நோட்டுப் புத்தகத்தில் பார்க்கிறீர்கள் (அட்டவணையின் முதல் பத்தியையும் கடைசிப் பத்தியையும் எழுதி வைத்திருந்தால் போதும்). எது யாரிடம் இருக்கிறது என்பதை இந்த அட்டவணை உங்களுக்குத் தெரிவிக்கிறது. உதாரணமாய் தட்டில் ஐந்து கொட்டைகள் எஞ்சுவதாய்க் கொண்டால், இதற்குரிய கோவை bca; ஆகவே,

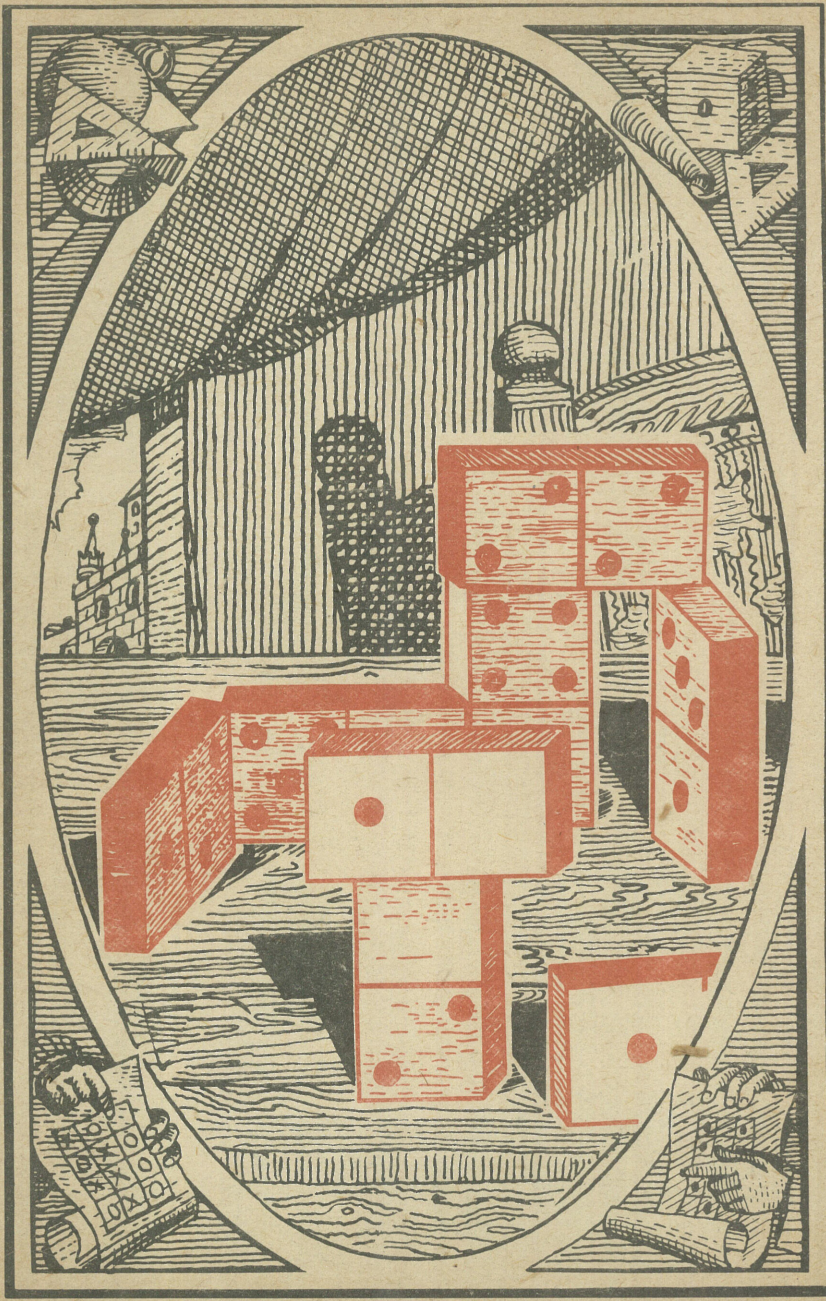
Dயிடம் இருப்பது சாவி,
Eயிடம் இருப்பது பேனுக்கத்தி,
Fயிடம் இருப்பது பென்சில்.

வித்தையில் வெற்றி பெற வேண்டுமாயின், உங்கள் நண்பர் மூவரில் யாருக்கு எத்தனை கொட்டைகள் கொடுத்தீர்கள் என்பதை நீங்கள் நினைவில் வைத்திருப்பது அவசியமாகும் (இங்கு நாம் செய்தது போல் அகர வரிசைப்படி கொட்டைகளைக் கொடுப்பதுதான் நினைவில் வைத்துக் கொள்வதற்குரிய சிறந்த வழி).

2

விளையாட்டு கணிதம்


15
012345678
121234567
123456789
3456789
3456789
567890
7890
456789234
23456
34567 9 12
23456789



டோமினே ஆட்டம்

14. 28 வில்லைகளையும் சங்கிலியாய் அடுக்குதல்.—

டோமினே விதிகளைப் பூரணமாய் அனுசரித்து 28 டோமினே வில்லைகளையும் ஒரே சங்கிலியாய் அடுக்க முடியுமா?

15. சங்கிலியின் இரு முனைகள்.—

28 டோமினே வில்லைகளையும் கொண்டு அமைந்த சங்கிலியின் தலை முனையில் ஐந்து புள்ளிகள் இருக்கின்றன. இந்தச் சங்கிலியின் எதிர் முனையில் எத்தனைப் புள்ளிகள் இருக்கும்?

16. டோமினே வித்தை.—

டோமினே வில்லைகளில் ஒன்றை உங்கள் நண்பர் எடுத்துக் கொண்டு எஞ்சிய 27 வில்லைகளைச் சங்கிலியாய் அடுக்கச் சொல்கிருர். தான் எடுத்துக் கொள்ளும் வில்லை எதுவாயினும், எஞ்சிய வில்லைகளைச் சங்கிலியாக்க முடியும் என்று அடித்துச் சொல்லிவிட்டு அவர் அறையிலிருந்து வெளியே போகிருர்.

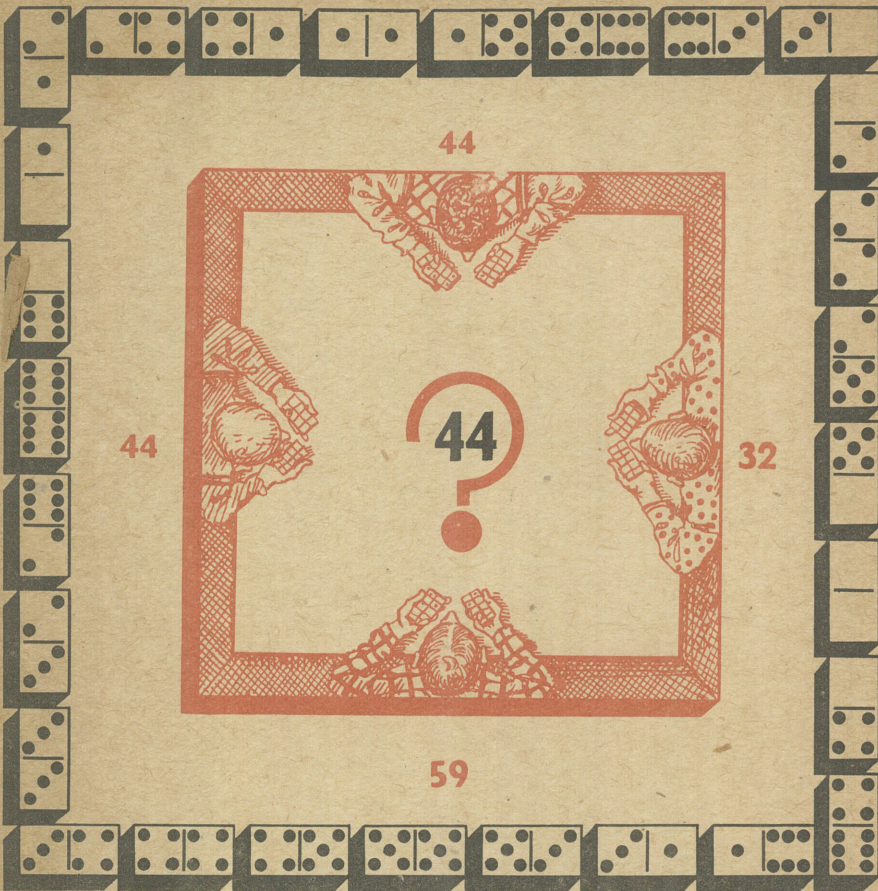
எஞ்சிய வில்லைகளை நீங்கள் சங்கிலியாய் அடுக்கிப் பார்க்கிறீர்கள். உங்கள் நண்பர் கூறியது மெய்தான் என்பதைக் காண்கிறீர்கள். இன்னும் வியக்கத்தக்கது என்னவெனில், நீங்கள் அடுக்கி அமைத்த சங்கிலியைப் பார்க்காமலே வெளியிலிருந்தபடியே உங்கள் நண்பர் இந்தச் சங்கிலியின் இரு முனைகளிலும் இருக்கும் புள்ளி எண்களைச் சொல்லிவிடுகிருர்.

எப்படி அவரால் இவற்றைத் தெரிந்து கொள்ள முடிந்தது?

எஞ்சும் எந்த 27 வில்லைகளையும் சங்கிலியாய் அமைக்க முடியுமென அவ்வளவு திடமாய்க் கூறினுரே, ஏன்?

17. சதுரச் சட்டம்.—

டோமினே வில்லைகளை ஆட்ட விதிகளை அனுசரித்து அடுக்கி அமைக்கப்பட்ட சதுரச் சட்டத்தை படம் 5 காட்டுகிறது. நான்கு பக்கங்களும் நீளத்தில் சமமாய் இருக்கின்றன; ஆனுல் புள்ளிகளின் மொத்த எண்ணிக்கையில் நான்கு பக்கங்களும் சமமாய் இல்லை. உச்சிப் பக்கத்திலும் இடப் பக்கத்திலும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை 44, ஏனைய இரு பக்கங்களிலும் இந்த எண்ணிக்கை முறையே 59உம், 32உம் ஆகும்.



படம் 5. டோமினோ சதுரச் சட்டம்.

ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் 44 புள்ளிகளைக் கொண்ட சதுரச் சட்டத்தை உங்களால் அமைக்க முடியுமா?

18. **ஏழு சதுரங்கள்.—**

படம் 6ல் காட்டப்படுவதைப் போல், ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் ஒரே எண்ணிக்கையிலான புள்ளிகளைக் கொண்ட நான்கு டோமினோ வில்லைச் சதுரச் சட்டத்தை அமைக்க முடியும். ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் 11 புள்ளிகள் இருக்கின்றன.

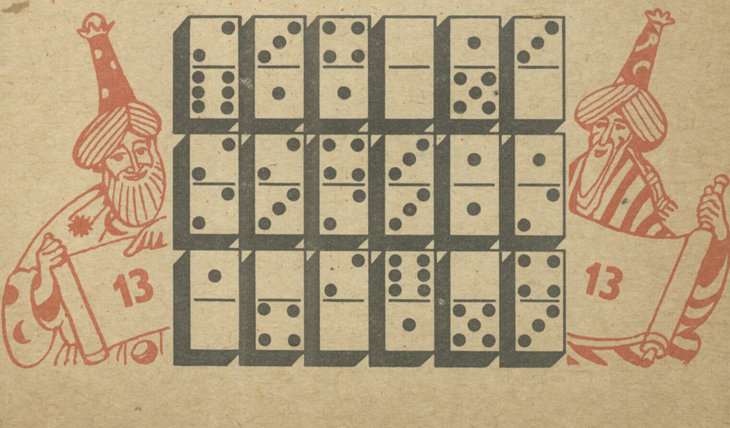
படம் 6. டோமினோ சதுரம்.

இம்மாதிரி ஏழு சதுரச் சட்டங்களை 28 டோமினோ வில்லைகளைக் கொண்டு அமைத்திட முடியுமா? ஏழு சதுரங்களிலும் எல்லாப் பக்கங்களிலும் ஒரே எண்ணிக்கையிலான புள்ளிகள் இருக்க வேண்டும் என்பதில்லை, ஒவ்வொரு சதுரத்திலும் நான்கு பக்கங்களிலும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை சமமாய் இருந்தால் போதும்.

19. மாயச் சதுரங்கள்.—

18 டோமினோ வில்லைகளைக் கொண்டு அமைக்கப்பட்ட ஒரு சதுரத்தை படம் 7 காட்டுகிறது. இதில் அதிசயம் என்னவெனில், நேர்க்குத்து, கிடைமட்டம், குறுக்கு ஆகிய எந்த வரிசையானாலும் இதன் ஒவ்வொரு வரிசையிலும் 13 புள்ளிகள் இருக்கின்றன. இம்மாதிரியான சதுரங்கள் தொன்னெடுங் காலந் தொட்டு ''மாயச் சதுரங்கள்'' என்பதாய் அழைக்கப்படுகின்றன.

18 டோமினோ வில்லைகளைக் கொண்டு வேறு சில மாயச் சதுரங்களை அமையுங்கள், ஒவ்வொரு சதுரத்திலும் புள்ளிகளின்



படம் 7. மாயச் சதுரம்.

எண்ணிக்கை வெவ்வேருய் இருக்கலாம். ஒரு வரிசையில் இருக்க வேண்டிய புள்ளிகளின் குறைந்தபட்ச எண்ணிக்கை 13, அதிகபட்ச எண்ணிக்கை 23.

20. டோமினேவில் விருத்தி வரிசை.—

ஆறு டோமினே வில்லைகளை ஆட்ட விதிகளுக்கு இணங்க அடுக்கி, ஒவ்வொரு வில்லையிலும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை முந்தியதைக் காட்டிலும் ஒன்று வீதம் அதிகரித்துச் செல்லும் படி வைக்கப்பட்டிருப்பதைப் படம் 8ல் காணலாம். அதாவது, முதல் வில்லையில் 4 புள்ளி, இரண்டாவதில் 5, மூன்ருவதில் 6, நான்காவதில் 7, ஐந்தாவதில் 8, ஆருவதில் 9 என்ற வரிசையில் இருக்கிறது.

படம் 8. டோமினேவில் விருத்தி வரிசை.

எண்களின் வரிசை ஒரே அளவு அதிகரித்தோ, குறைந்தோ செல்லுமாயின், அந்த வரிசைக்கு ''கூட்டல் விருத்தி வரிசை'' (arithmetical progression) என்று பெயர். நமது உதாரணத்தில் ஒவ்வொரு வில்லையிலும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை முந்தியதைவிட ஒன்று வீதம் கூடிச் செல்கிறது. ஒன்றுக்குப் பதிலாய் வேறு எந்த வீதத்திலும் இந்த எண்ணிக்கை வேறுபட்டுச் செல்லலாம்.

ஆறு வில்லைகளைக் கொண்டு வேறு சில விருத்தி வரிசைகளை அடுக்கிக் காட்டுங்கள்.

பதினைந்து வில்லைப் புதிர்

1 முதல் 15 வரையிலான எண்கள் குறிக்கப்பட்ட 15 சதுர வில்லைகளைக் கொண்ட பெட்டியின் கதை மிகவும் சுவையானதாகும். மிகச் சிலரே இந்தக் கதையை அறிவர். ஜெர்மன் கணிதவியலாளரும், காய் ஆட்ட நிபுணருமான வி. ஆரென்ஸ் இதைப் பற்றி எழுதியதாவது.

‘‘1870ஆம் ஆண்டுகளின் கடைப் பகுதியில் அமெரிக்க ஐக்கிய நாட்டில் ‘பதினைந்து வில்லைப் புதிர்’ என்பதாய் ஒரு புதிய ஆட்டம் தோன்றியது. இது மிக விரைவாய்ப் பிரபலமடைந்து எங்கும் பரவி, சீக்கிரத்தில் சமுதாயத்துக்கே அபாயமுண்டாக்கக் கூடிய பித்தாய் ஏராளமானோரை ஆட்டிப்படைத்தது.

‘‘இந்தப் பித்து ஐரோப்பாவையும் பிடித்துக்கொண்டது. எங்கு பார்க்கினும் பலரும் இந்தப் புதிருக்கு விடை காணும் முயற்சியில் மும்முரமாய் ஈடுபடுவதைக் காண முடிந்தது. அலுவலக ஊழியர்களும் கடைச் சிப்பந்திகளும் இந்தப் புதிரால் மதி மயங்கலாயினர். ஆலை அலுவலக அதிபர்கள் வேறு வழி இல்லாமல் வேலை நேரத்தின் போது இந்த ஆட்டத்துக்குத் தடை விதிக்க வேண்டியதாயிற்று. மக்களைப் பிடித்தாட்டிய இந்த வெறியைப் பயன்படுத்தி இலாப முனைப்பாளர்கள் பெரிய பெரிய போட்டிகளுக்கு ஏற்பாடு செய்தனர். ஜெர்மன் ரீஹ்ஸ்டாகினுள்ளும் இந்தப் புதிர் புகுந்துவிட்டது. பிரபல புவியியலாளரும் கணித மேதையுமான சிக்முண்டு கூந்தர் என்பவர், இந்தப் பித்து பரவிச் சென்ற காலத்தில் ரீஹ்ஸ்டாக் உறுப்பினராய் இருந்தவர். தலை நரைத்துப் போன தமது சக உறுப்பினர்கள் பலரும் இந்தச் சதுரப் பெட்டிகளை வைத்துக் கொண்டு உயிரை விட்டதைப் பற்றி இவர் தமது குறிப்புகளில் எழுதினார்.

படம் 9. பதினைந்து வில்லைப் புதிர்.

‘‘பாரீசில் இந்த ஆட்டம் வெளிகளிலும் வீதிகளிலும் ஆடப்பட்டது, விரைவில் தலைநகரிலிருந்து மாநிலங்களுக்கும் பரவிச் சென்றது. ‘இந்தச் சிலந்தி தனது வலையைப் பின்னிச் செல்லாத பட்டி தொட்டி எதுவும் இருக்கவில்லை’ என்பதாய் பிரெஞ்சு எழுத்தாளர் ஒருவர் இந்த வெறியை விவரிக்கையில் குறிப்பிட்டார்.

"இந்தப் பைத்தியக்காரத்தனம் 1880ல் உச்ச நிலை அடையலாயிற்று. முடிவில் கணிதவியலாளர்கள் இது சம்பந்தமான எண்ணிலடங்காத புதிர்களில் ஒரு பாதிக்கு மட்டுமே தீர்வு காண முடியும், ஏனையவற்றுக்குத் தீர்வே இல்லை என்பதை நிரூபித்துக் காட்டி இந்த கொடிய பைசாசத்தைத் தோற்கடித்தார்கள்.

"என்ன பாடு பட்டாலும் இந்தப் புதிர்கள் சிலவற்றுக்குத் தீர்வு காண முடியாது என்பதால்தான் போட்டிகளுக்கு ஏற்பாடு செய்வோர் அச்சமின்றி பெருந் தொகைகளைப் பரிசாய் அளிக்க முன்வருகிறார்கள் என்பதைக் கணிதவியலாளர்கள் தெளிவாக்கினர். இந்தப் புதிரைக் கண்டுபிடித்த சாம் லாயிட் எல்லோரையும் மிஞ்சிச் சென்றார். பதினைந்து வில்லைப் புதிரின் ஒரு வகைக்கு தீர்வு கூறுவோருக்கு ஆயிரம் டாலர் பரிசு அளிப்பதாய் அறிவிக்கும்படி நியூயார்க் பத்திரிகை உடைமையாளர் ஒருவரை அவர் கேட்டுக் கொண்டார். ஆனால் அந்த உடைமையாளர் தயங்கியதும் லாயிட் தாமே அந்தத் தொகையை அளிக்கப் போவதாய்ப் பிரகடனம் செய்தார். சாதுர்யமான புதிர்கள் போடுவதில் லாயிட் ஒப்பற்றவர். ஆனால் வேடிக்கை என்னவெனில் அவரால் தமது அதிசயப் புதிருக்கு அமெரிக்க ஐக்கிய நாட்டில் பேட்டன்டு பெறமுடியவில்லை. பேட்டன்டு பெற விரும்புகிறவர் தமது கண்டுபிடிப்பின் 'செயல்படும் மாதிரி அமைவு' ஒன்றை சமர்ப்பிக்க வேண்டுமென்று விதிகள் கூறுகின்றன. லாயிடின் புதிருக்கு விடை காணமுடியுமா என்று பேட்டன்டு அலுவலகத்தினர் கேட்ட போது கணித வழியில் விடை இல்லை என்று ல்ாயிட் ஒத்துக் கொள்ள வேண்டியதாயிற்று. "அப்படியானால் 'செயல்படும் மாதிரி அமைவு' ஒன்று இதற்கு இருக்க முடியாது, ஆகவே பேட்டன்டு அளிப்பதற்கில்லை" என்று அதிகாரி கூறிவிட்டாராம். லாயிட் இதை அதோடு விட்டுவிட்டார். தமது கண்டுபிடிப்புக்குக் கிடைக்கவிருந்த அமோக வெற்றியை அவர் முன்கூட்டியே அறிய முடிந்திருந்தால் லாயிட் அதோடு விடாமல் மேலும் வற்புறுத்தியிருப்பார்."

இந்தப் புதிரைப் பற்றி இதன் கண்டுபிடிப்பாளர் கூறிய விவரங்களில் சில வருமாறு:

"நகரும்வில்லைகளையுடைய பெட்டியை வைத்துக்கொண்டு 1870ஆம் ஆண்டுகளில் எல்லோரையும் மண்டையை

படம் 10. வில்லைகளின் ஒழுங்கானவரிசை (நிலை 1).

படம். 11. தீர்வு இல்லாதது (நிலை 2).

உடைத்துக் கொண்டதைப் புதிர்களில் ஆர்வம் கொண்டவர்கள் மறந்திருக்க மாட்டார்கள். 'பதினைந்து வில்லைப் புதிர்' என்பதாய் இது பெயர் பெறலாயிற்று. பதின்மூன்று வில்லைகள் வரிசைக் கிரமப்படி அடுக்கப்பட்டு 14, 15 ஆகிய இரு வில்லைகள் மட்டும் பிசகி இருந்தன (படம் 11ஐப் பார்க்கவும்). ஒரு தடவைக்கு ஒரு வில்லையை நகர்த்தி 14, 15ஆவது வில்லைகளையும் வரிசை பிசகாது அமையச் செய்வதுதான் கொடுக்கப்பட்ட பணி.

''சரியான முதலாவது தீர்வுக்கு வாக்களிக்கப்பட்ட ஆயிரம் டாலர் பரிசைப் பெறுவதற்காக அயராது எல்லாரும் வேலை செய்தனர். ஆயினும் ஒருவராலும் வெற்றி பெற முடியவில்லை. இது சம்பந்தமாய் தமாஷான கதைகள் பலவும் அடிபட்டன. கடைக்காரர்கள் இந்தப் புதிருக்கு விடை

காணும் முயற்சியில் மூழ்கிப் போய்க் கடைகளைத் திறக்க மறந்ததாகவும், மதிப்புக்குரிய அதிகாரிகள் இரவெல்லாம் தூங்காமல் இந்தப் புதிரை வைத்துக் கொண்டு உயிரை விட்டதாகவும் பேசப்பட்டது. வெற்றி நமதே என்ற திட நம்பிக்கையுடன் விடாப்பிடியாய் எல்லாரும் இம்முயற்சியில் ஈடுபட்டு வந்தனர். கப்பலோட்டிகள் தமது கப்பல்களைப் பாறை முனைகளில் மோதவிட்டனர், ரயில் டிரைவர்கள் ரயிலை நிலையங்களில் நிறுத்த வேண்டுமென்பதையே மறந்து போயினர், உழவர்கள் தமது ஏர்கள் மண்ணிலே சிக்கு வதையும் கவனிக்கத் தவறிவிட்டனர்.''

* * *

இந்தப் புதிரின் அடிப்படை விவரங்களை வாசகர்களுக்கு எடுத்துரைக்கிறோம். மொத்தத்தில் இந்தப் புதிர் மிக மிக சிக்கலானது, உயர் இயற்கணிதத்தின் பிரிவுகளில் ஒன்றான ''அணிகோவைத் தத்துவத்துடன்'' (theory of determinants) சம்பந்தப்பட்டதாகும். இது பற்றி ஆரென்ஸ் எழுதியதாவது:

''காலி இடத்தை உபயோகித்து நகரும் வில்லைகளை நகர்த்திச் சென்று முடிவில் 15 வில்லைகளையும் அவற்றின் எண் வரிசையில் ஒழுங்காய் அமையச் செய்வதே இங்குள்ள பணி. அதாவது, வில்லை ஒன்று இடது கை மேல் மூலையிலும், வில்லை 2 அதற்கு வலது பக்கத்திலும், வில்லை 2க்கு அடுத்த படி வில்லை 3உம், வில்லை 4 வலது கை மேல் மூலையிலும், அடுத்த வரிசையில் வில்லைகள் 5, 6, 7, 8 வரிசைக் கிரமத்தி லும், இதே போல ஏனைய வில்லைகளும் வரிசை பிசகாமலும் வரும்படிச் செய்தாக வேண்டும். (பார்க்கவும் படம் 10).

''வில்லைகள் யாவும் ஒழுங்கின்றி தாறுமாறாய் அமைந் திருப்பதாய் வைத்துக் கொள்வோம். தொடர்ச்சியாய் நகர்த்திச் சென்று வில்லை 1ஐ அதற்குரிய சரியான இடத்தில் கொண்டு வந்து வைப்பது சாத்தியமே.

''வில்லை 1ஐத் தொடாமலே வில்லை 2ஐ அடுத்த சதுரத் தில் நகர்த்திக் கொண்டு வந்து வைப்பதும் சாத்தியமே. பிறகு வில்லைகள் 1, 2ஐத் தொடாமலே வில்லைகள் 3, 4ஐ நகர்த்தி அவற்றுக்குரிய சதுரங்களுக்கு வரச் செய்துவிட லாம். இவ்வில்லைகள் கடைசி இரு நேர்குத்து வரிசைகளில் இல்லாமற் போவதாய் வைத்துக் கொள்வோம். எளிதில்

இவற்றை இவ்வரிசைகளுக்கு நகர்த்திக் கொண்டு வந்து விடலாம். உச்சி வரிசையில் இப்போது 1, 2, 3, 4 வில்லைகள் ஒழுங்காய் அமைந்து விடுகின்றன. இனி நாம் இந்நான்கு வில்லைகளைத் தொடாமலே ஏனையவற்றை நகர்த்தி ஒழுங்கு செய்யலாம். உச்சி வரிசையைச் செய்தது போலவே 5, 6, 7, 8 வில்லைகள் இருக்க வேண்டிய வரிசையையும் ஒழுங்கு செய்துவிடலாம். பிறகு அடுத்த இரு வரிசைகளில் வில்லை 9ஐயும் வில்லை 13ஐயும் அவற்றுக்குரிய ஒழுங்கான இடங்களில் கொண்டு வந்து வைக்கலாம். இதைச் செய்ததும் 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13ஆம் வில்லைகளைத் தொடக் கூடாது, இப்போது ஆறு சதுரங்கள் எஞ்சியுள்ளன, இவற்றில் ஒன்று வில்லை இல்லாத காலிச் சதுரம், ஏனைய ஐந்திலும் 10, 11, 12, 14, 15ஆம் வில்லைகள் வரிசைக் கிரமமின்றி தாறுமாருய் அமைந்திருக்கின்றன. 10, 11, 12ஆம் வில்லைகளை அப்படியும் இப்படியுமாய் நகர்த்தி ஒழுங்கு வரிசையில் அமையச் செய்து விட முடியும். இதன்பின் 14, 15ஆம் வில்லைகள் எஞ்சியிருக்கும், இவை ஒழுங்கு குலையாமலும் இருக்கலாம், குலைந்தும் இருக்கலாம் (படம் 11). இவ்விதம் நாம் பின்வரும் நிலைமை வந்தடைகிருேம் (வாசகர் இதைத் தாமே செய்து சரி பார்த்துக் கொள்ளலாம்):

''வில்லைகள் ஆரம்பத்தில் எந்த இணைவில் இருப்பதாயினும், அவற்றைப் படம் 10இன் நிலைக்கோ (நிலை 1) அல்லது படம் 11இன் நிலைக்கோ (நிலை 2) கொண்டு வந்துவிட முடியும்.

''வில்லைகளின் ஓர் இணைவை (இதை C என்பதாய்க் குறிப்பிடுவோம்) நிலை 1க்குக் கொண்டு வர முடியுமாஞல், இதற்கு நேர் எதிரான மாற்றத்தையும் செய்ய முடியும் என்பது தெளிவு, அதாவது நிலை 1ஐ இணைவு Cஆக மாற்ற முடியும் என்பது தெளிவு. ஏனெனில் எந்த நகர்த்தலையும் தலைகீழாகவும் செய்ய முடியும், அதாவது வில்லை 12ஐக் காலி இடத்துக்கு மாற்ற முடியுமாயின், அதை திரும்பவும் அதன் பழைய இடத்துக்கே கொண்டுவரவும் முடியும்.

''இவ்விதம் இணைவுகளின் இரு வகைக் கோவைகள் இருக்கின்றன: முதல் வகையில் வில்லைகளை ஒழுங்கு நிலைக்கு (நிலை 1) கொண்டு வந்துவிடலாம்; இரண்டாவது வகையில் வில்லைகளை நிலை 2க்கே கொண்டு வர முடியும். எதிர்மறையில் கூறுவதாயின், ஒழுங்கு நிலையிலிருந்து முதல் வகைக் கோவை

யைச் சேர்ந்த எந்த இணைவையும் வந்தடைய முடியும்; நிலை 2லிருந்து இரண்டாவது வகைக் கோவையைச் சேர்ந்த எந்த இணைவையும் வந்தடைய முடியும். மற்றும், ஒரே வகைக் கோவையைச் சேர்ந்த எந்த இரு இணைவுகளிலும் ஒன்றை மற்றொன்றாய் மாற்றியமைக்க முடியும்.

''நிலை 1ஐ நிலை 2 ஆக மாற்ற முடியுமா? எத்தனை தரம் தான் வில்லைகளை நகர்த்திச் சென்றாலும் இந்த மாற்றத்தைச் செய்ய முடியாது—இதை நாம் சந்தேகத்துக்கு இடமின்றி நிரூபித்துக் காட்டலாம். ஆகவே வில்லைகளது பிரம்மாண்ட எண்ணிக்கையிலான இணைவுகளை இரு கோவைகளாய்ப் பிரிக்கலாம்—முதலாவது கோவையில் வில்லைகளை வரிசைக் கிரமத்தில் அமைக்க முடியும், அதாவது இதில் பணியை நிறைவேற்ற முடியும்; இரண்டாவது கோவையில் எப்பாடு பட்டாலும் வில்லைகளை ஒருபோதும் வரிசைக் கிரமத்துக்குக் கொண்டு வர முடியாது, அதாவது இதில் பணியை நிறைவேற்ற முடியாது. இந்த இரண்டாவது கோவையைச் சேர்ந்த ஓர் இணைவை அளித்துதான் பணியை நிறைவேற்றுவோருக்குப் பெருந் தொகைகளைப் பரிசாய்த் தருவதாய் ஆசை காட்டினார்கள்.

''குறிப்பிட்ட ஓர் இணைவு எந்தக் கோவையைச் சேர்ந்தது என்று இனம் காண வழி உண்டா? உண்டு, இவ்வழி என்னவென்பதை ஆராய்வோம்.

''படம் 12ல் காட்டப்படும் இணைவைப் பரிசீலித்துப் பார்க்கலாம். வில்லைகளின் உச்சி வரிசை ஒழுங்காய் இருக்கிறது. இரண்டாவதும் வில்லை 9ஐத் தவிர்த்து ஒழுங்காகவே இருக்கிறது. வில்லை 9 இங்கு வில்லை 8க்குரிய இடத்தில் இருக்கிறது. அதாவது வில்லை 9 வில்லை 8க்கு முன்னதாய் அமைந்திருக்கிறது. ஒழுங்கு இவ்விதம் மீறப்படும் போது அதை 'ஒழுங்கீனம்' என்கிறோம். மேலும் பரிசீலனை செய்கையில், வில்லை 14 அதற்குரிய இடத்திலிருந்து மூன்று சதுரங்கள் முன்னதாய் இருக்கக் காண்கிறோம்; அதாவது அது 11, 12, 13ஆம் வில்லைகளைத் தாண்டி வந்து நிற்கிறது. இங்கே மூன்று 'ஒழுங்கீனங்கள்' ஏற்பட்டிருக்கின்றன (12க்கு முன்னதாய் 14, 13க்கு முன்னதாய் 14, 11க்கு முன்னதாய் 14). மொத்தம் இப்போது $1+3=4$ 'ஒழுங்கீனங்கள்'. பிறகு வில்லை 12 வில்லை 11க்கு முன்னதாகவும், இதே போல் வில்லை 13உம் வில்லை 11க்கு முன்னதாகவும் இருக்கின்றன. இவை மேலும்

இரண்டு 'ஒழுங்கீனங்கள்' ஆகின்றன. ஒழுங்கீனங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை 6 ஆகிறது. இவ்விதம் அந்தந்த இணை விலும் முதலில் வலது கை கீழ் மூலையைக் காலி இடமாக்கிக் கொண்டு, அதிலுள்ள 'ஒழுங்கீனங்களின்' மொத்த எண்ணிக் கையை நிர்ணயிக்கிறோம். நமது எடுத்துக்காட்டில் இருப்பது போல் 'ஒழுங்கீனங்களின்' மொத்த எண்ணிக்கை இரட்டைப்படையாய் இருந்தால், வில்லைகளை ஒழுங்கு முறை தவறுமல் திருத்தியமைக்க முடியும், பணி நிறை வேற்றக் கூடிய பணியாகும். இவ்வாறின்றி இந்த மொத்த எண்ணிக்கை ஒற்றைப் படையாய் இருந்தால், இணைவு இரண்டாவது வகையைச் சேர்ந்ததாகும், அதாவது நிறைவேற்ற முடியாத பணியை அளிப்பதாகும்.

''இந்தப் புதிருக்கு அளிக்கப்பட்ட கணித விளக்கம் இப் புதிரால் எங்கும் பரவிய பித்துக்கு முடிவு கட்டிற்று. சந்தே கத்துக்குச் சிறிதும் இடமில்லாத விரிவான விளக்கத் தத்து வத்தைக் கணிதம் உருவாக்கித் தந்தது. இந்தப் புதிருக்குத் தீர்வு காண்பது ஏனைய போட்டிகளைப் போல் ஊகத்தையோ கூர் மதியையோ பொறுத்தது அல்ல; முடிவை முழு அள வுக்கு நிச்சயித்துவிடும் கணித நியதிகளையே முற்றிலும் பொறுத்ததாகும்.''

இனி இத்துறையிலான பிரச்சினைகள் சிலவற்றுக்குத் தீர்வு காண முயலுவோம்.

தீர்வு காணக் கூடிய மூன்று பிரச்சினைகளைக் கீழே காணலாம். பதினைந்து வில்லைப் புதிரைக் கண்டு பிடித்தவர் வகுத்தளித்தவை இவை.

21. முதலாவது பிரச்சினை.—

படம் 12ல் காட்டப்படும் இணைவை ஒழுங்கான வரிசை யாக்கி, இடது கை உச்சி மூலையைக் காலி இடமாகும்படி (படம் 13ல் இருப்பதைப் போல்) மாற்றியமையுங்கள்.

22. இரண்டாவது பிரச்சினை.—

படம் 10ல் குறிக்கப்படும் பெட்டியை கால் சுற்று சுற்றி பக்கவாட்டில் அமைத்து படம் 14ல் காணப்படும் வரிசை யமைவு கிடைக்கும்படி வில்லைகளை நகர்த்துங்கள்.

படம் 12. வில்லைகள் ஒழுங்காய் இல்லை.

படம் 13. லாயிடின் முதலாவது பிரச்சினை.

படம் 14. லாயிடின் இரண்டாம் பிரச்சினை.

23. மூன்றுவது பிரச்சினை.—

புதிரின் விதிகளுக்கு இணங்க வில்லைகளை நகர்த்தியமைத்து இந்தச் சதுரத்தை மாயச் சதுர மாக்குங்கள். நேர்குத்து, கிடை மட்டம், குறுக்கு ஆகிய எந்த வரிசையிலும் கூட்டுத்தொகை 30 ஆக இருக்க வேண்டும்.

பதில்கள் 14-23

14. பிரச்சினையை எளிதாக்கிக் கொள்ளும் பொருட்டு, ஜோடி வில்லைகள் ஏழையும் (0—0, 1—1, 2—2 முதலானவை) தனியே ஒதுக்கி வைப்போம். மீதியுள்ள 21 வில்லைகளில் ஒவ்வோர் எண்ணும் ஆறு தடவை குறிக்கப்பட்டிருக்கும். உதாரண

மாய், 4 புள்ளிகளை ஒரு பாதியில் கொண்ட வில்லைகள் ஆறு இருக்கும்,அவை வருமாறு:

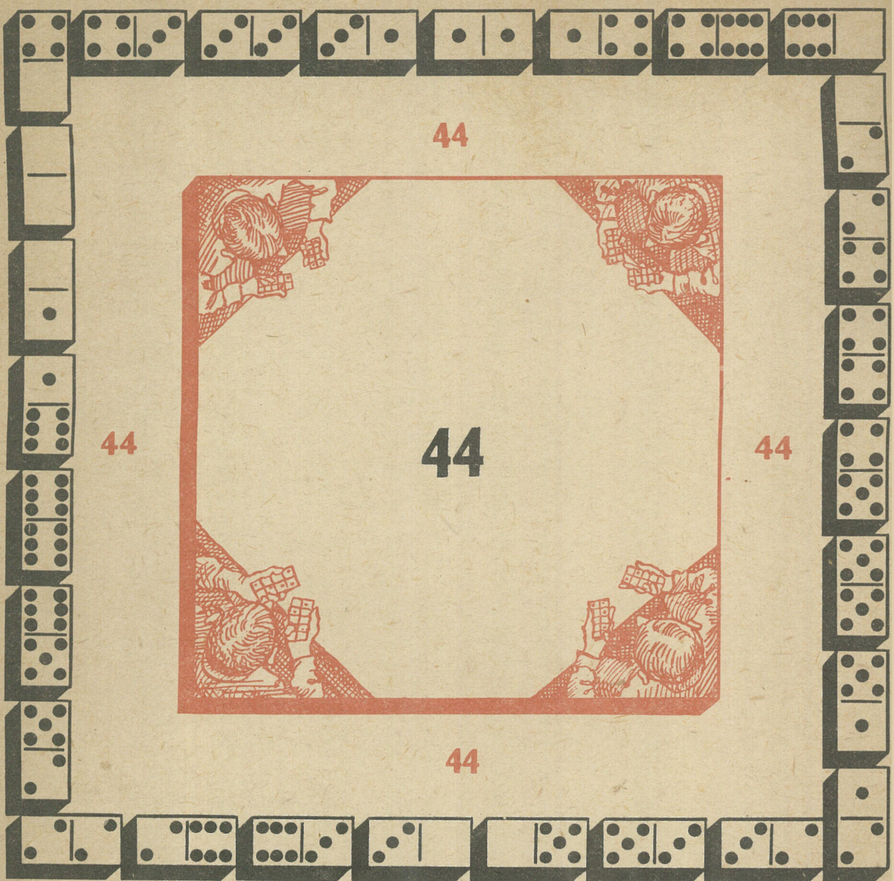
4—0, 4—1, 4—2, 4—3, 4—5, 4—6.

ஒவ்வோர் எண்ணும் இவ்வாறு இரட்டைப் படை தடவை குறிக்கப்பட்டிருக்கும் என்பது தெரிகிறது. ஆகவே இந்த வில்லைகளை டோமினோ விதிகளை அனுசரித்து சங்கிலியாய் அடுக்க முடியும் என்பது தெளிவு. இப்படி இந்த 21 வில்லைகளையும் சங்கிலியாய்ச் சேர்த்து அடுக்கியபின், ஜோடி வில்லைகள் ஏழையும் அந்தந்த ஜோடியின் புள்ளிகளுக்கும் சமமான புள்ளிகளுடன் முடிவுறும் வில்லைகளுக்கிடையே, அதாவது இரு சுன்னங்களுக்கும், இரு ஒன்றுகளுக்கும், இரு இரண்டுகளுக்கும்... இடையே செருகிச் சேர்க்கிறோம். இப்போது 28 வில்லைகளும் டோமினோ ஆட்ட விதிகளுக்கு இணங்கச் சேர்த்தடுக்கப்பட்ட சங்கிலியாய் அமைந்துவிடும்.

15. 28 வில்லைகளாலான இந்த சங்கிலி எத்தனைப் புள்ளிகளுடன் ஆரம்பிக்கிறதோ, அத்தனைப் புள்ளிகளுடன்தான் முடிவுற வேண்டும்—இதை எளிதில் நிரூபிக்கலாம். இப்படி முடிவுற வில்லையானால், சங்கிலியின் இரு முனைகளிலுமுள்ள புள்ளி எண் ஒற்றைப் படைத் தடவை குறிக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும் (சங்கிலியினுள் எண்கள் எப்போதும் ஜோடி ஜோடியாகவே இருந்தாக வேண்டும்). ஆனால் டோமினோ வில்லைகள் யாவற்றிலுமாய்ச் சேர்ந்து ஒவ்வோர் எண்ணும் எட்டு தடவை (அதாவது, இரட்டைப் படைத் தடவை) குறிக்கப்பட்டிருக்கும் என்பதை நாம் அறிவோம். ஆகவே சங்கிலியின் ஒரு முனையில் இருக்கும் எண்தான் எதிர் முனையிலும் இருக்க வேண்டும் என்பது விளங்குகிறது.

இடைக் குறிப்பாய் இங்கு மற்றொரு சுவையான விவரத்தையும் குறிப்பிடலாம். அதாவது, 28 டோமினோ வில்லைகளைக் கொண்டு அமைந்த இந்த சங்கிலியின் இரு முனைகளையும் டோமினோ விதிக்கு இணங்க சேர்த்து மூடிய வடமாக்கி விட முடியும். ஆகவே, டோமினோ வில்லைகள் யாவற்றையும் ஆட்ட விதிகளுக்கு இணங்க சேர்த்து அடுக்கி இரு முனைகளைக் கொண்ட சங்கிலியாகவோ, அல்லது இணைந்த வடமாகவோ அமைத்திடலாம்.

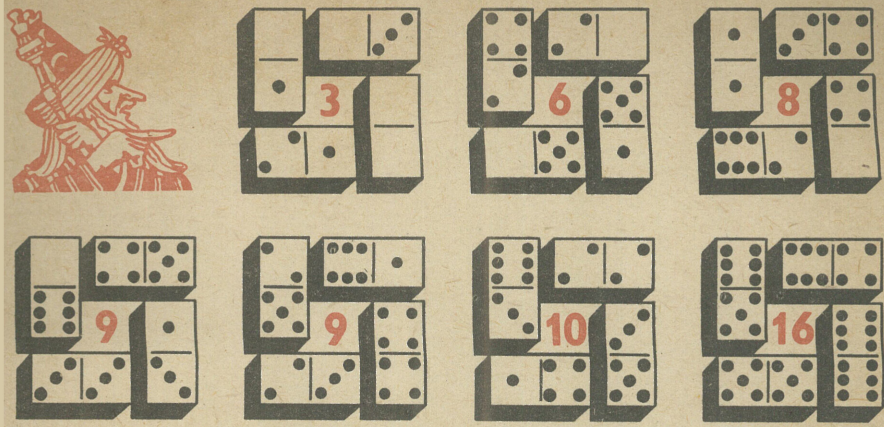
இந்த சங்கிலி அல்லது வடத்தை எத்தனை வழிகளில்



படம் 15.

அமைத்திடலாம் என்பதை அறிந்து கொள்ள நீங்கள் விரும்பலாம். அலுப்பூட்டும் இந்த கணக்கைப் போட முற்படாமல், பிரம்மாண்ட எண்ணிலான வழிகளில் இதைச் செய்யலாம் என்பதை மட்டும் இங்கு குறிப்பிடுகிறோம். சுருங்கச் சொல்வதெனில், $2^{13} \times 3^{8} \times 5 \times 7 \times 4{,}231$ என்ற பெருக்கலின் தொகையான *7,959,229,931,520* வழிகளில் இதைச் செய்யலாம்.

16. இந்தப் பிரச்சினையும் மேலே கூறப்பட்டதைப் போன்றது தான். *28* டோமினோ வில்லைகளைச் சேர்த்து மூடிய வடமாய்



படம் 16.

அடுக்கமுடியும் என்பதை அறிவோம் நாம். ஆகவே ஒரு வில்லையை எடுத்துவிடுவோமாயின்,

1) எஞ்சியுள்ள 27 வில்லைகள் இரு முனைகளைக் கொண்ட ஒரு சங்கிலியாகவே இருக்கும்;

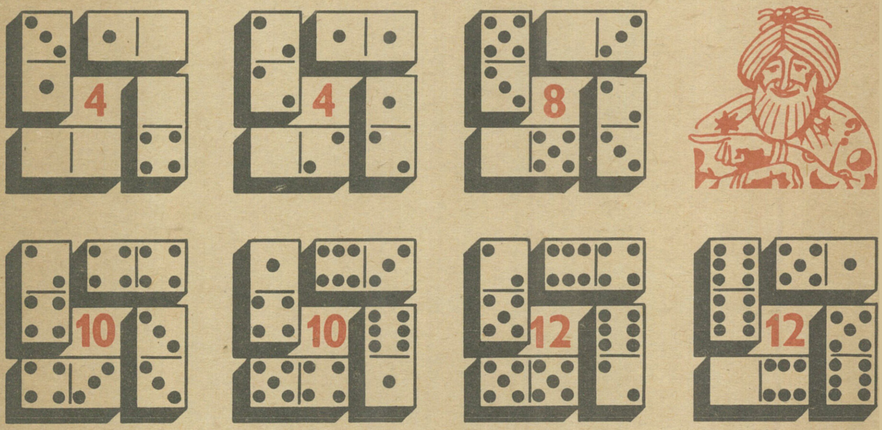
2) இந்த சங்கிலியின் இரு முனைகளிலும் இருக்கும் புள்ளி எண்கள், தனியே எடுக்கப்பட்ட வில்லையின் இரு பாதிகளிலுள்ள புள்ளி எண்களாகவே இருக்கும்.

டோமினோ வில்லை ஒன்றை எடுத்து மறைத்து வைத்துக் கொள்ளும் நீங்கள் சங்கிலியின் இரு முனைகளிலும் இருக்கக் கூடிய புள்ளி எண்களை முன்கூட்டியே சொல்லிவிட முடியும்.

17. சதுரத்தின் நான்கு பக்கங்களிலுமுள்ள புள்ளிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $44 \times 4 = 176$ ஆகிறது; டோமினோ வில்லைகள் யாவற்றிலுமாய் மொத்தம் உள்ள புள்ளிகளை (168) காட்டிலும் இது 8 கூடுதலாகும். சதுரத்தின் நான்கு மூலைகளிலும் அமைந்த அரை வில்லைகளில் இருக்கும் புள்ளிகள் இரு தரம் கூட்டப்படுவதால் ஏற்படும் விளைவு இது. மூலைகளிலுள்ள புள்ளி எண்களின் கூட்டுத் தொகை 8 என்பது தெரிகிறது. அமைப்பு எப்படி இருக்க வேண்டுமென்பதை அறிய இது உதவுகிறது (இதை அறிதல் அப்போதும் மிகவும் சிக்கலானது தான்). இந்த அமைப்பு படம் 15ல் காட்டப்பட்டிருக்கிறது.

18. இந்தக் கேள்விக்குரிய விடைகளில் இரண்டைக் கீழே காணலாம். முதலாவது படத்தில் (படம் 16ல்) இருப்பவை:

பக்கத்துக்கு 3 புள்ளிகளையுடைய சதுரம்,
பக்கத்துக்கு 6 புள்ளிகளையுடைய சதுரம்,
பக்கத்துக்கு 8 புள்ளிகளையுடைய சதுரம்,
பக்கத்துக்கு 9 புள்ளிகளையுடைய 2 சதுரங்கள்,
பக்கத்துக்கு 10 புள்ளிகளையுடைய சதுரம்,
பக்கத்துக்கு 16 புள்ளிகளையுடைய சதுரம்.



படம் 17.

இரண்டாவது படத்தில் (படம் 17ல்) இருப்பவை:

பக்கத்துக்கு 4 புள்ளிகளையுடைய 2 சதுரங்கள்,
பக்கத்துக்கு 8 புள்ளிகளையுடைய சதுரம்,
பக்கத்துக்கு 10 புள்ளிகளையுடைய 2 சதுரங்கள்,
பக்கத்துக்கு 12 புள்ளிகளையுடைய 2 சதுரங்கள்.

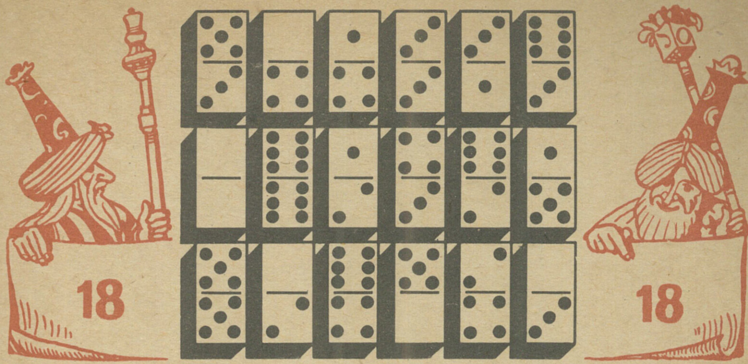
19. ஒவ்வொரு வரிசையிலும் 18 புள்ளிகளைக் கொண்ட ஒரு மாயச் சதுரத்தைப் படம் 18ல் காணலாம்.

20. இடைவேறுபாடு 2 ஆக அமைந்த விருத்தி வரிசைகளுக்கு இரு உதாரணங்கள் வருமாறு:

a) 0—0, 0—2, 0—4, 0—6, 4—4 (அல்லது 3—5), 5—5 (அல்லது 4—6).

b) 0—1, 0—3 (அல்லது 1—2), 0—5 (அல்லது 2—3), 1—6 (அல்லது 3—4), 3—6 (அல்லது 4—5), 5—6.

ஆறு-வில்லை விருத்தி வரிசைகள் மொத்தம் 23 இருக்கின்றன. துவக்க வில்லைகள் வருமாறு:



படம் 18.

a) இடை வேறுபாடு 1ஆக அமைந்த விருத்தி வரிசைகளுக்கு:

0—0	1—1	2—1	2—2	3—2
0—1	2—0	3—0	3—1	2—4
1—0	0—3	0—4	1—4	3—5
0—2	1—2	1—3	2—3	3—4.

b) இடை வேறுபாடு 2 ஆக அமைந்த விருத்தி வரிசைகளுக்கு:

0—0 0—2 0—1.

21. பின்வரும் 44 நகர்வுகளைச் செய்து இந்தப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காணலாம்:

14, 11, 12, 8, 7, 6, 10, 12, 8, 7,
4, 3, 6, 4, 7, 14, 11, 15, 13, 9,
12, 8, 4, 10, 8, 4, 14, 11, 15, 13,
9, 12, 4, 8, 5, 4, 8, 9, 13, 14,
10, 6, 2, 1.

22. பின்வரும் 39 நகர்வுகளைச் செய்து இப்பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காணலாம்:

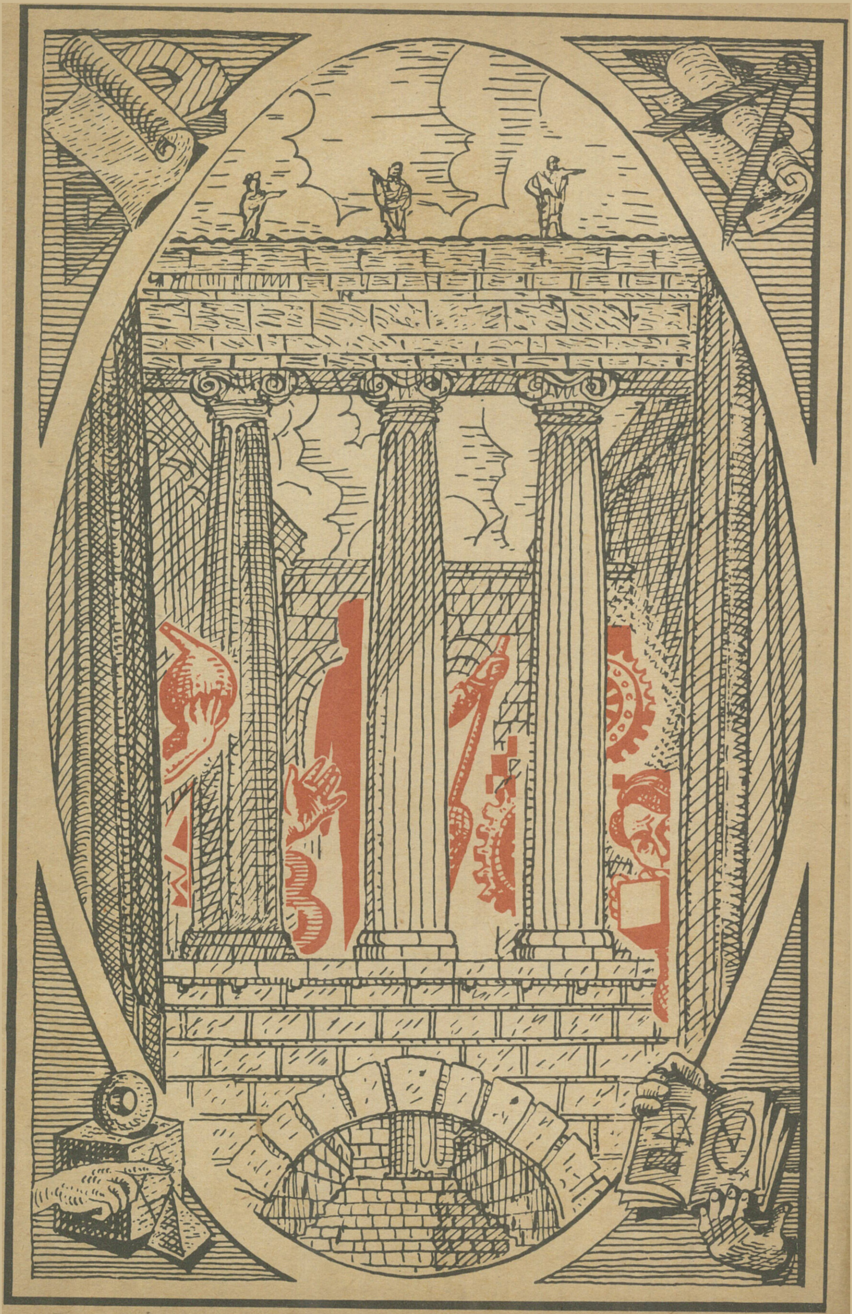
14, 15, 10, 6, 7, 11, 15, 10, 13, 9,
5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 10, 13,
9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 14,
13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12.

23. அடியிற் கண்ட நகர்வுகளைச் செய்து கூட்டுத் தொகை 30 வரும்படியான மாயச் சதுரத்தைப் பெறலாம்:

12, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15,
14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 14, 12, 8,
4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6,
5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2, 1, 13,
14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3.

3

மேலும் பன்னிரண்டு புதிர்கள்



24. நூற் கயிறு.—

சிறுவனின் தாய் துணி காய வைத்துக் கொண்டிருந்தவள், வெடுக்கென திரும்பி ''என்ன? இன்னும் நூற் கயிறு வேண்டுமா?'' என்று கூவினாள். ''நூற்கயிறு என்மேல் காய்த்துத் தொங்குகிறது என்று நினைக்கிறாய்? 'கயிறு கொடு, கயிறு கொடு'—எந்நேரமும் இதே பாட்டுதான். ஒரு கயிறு உருண்டையை அப்படியே முழுதாய் நேற்றுதானே உன்னிடம் எடுத்துக் கொடுத்தேன். இன்னும் வேண்டும் என்கிறாயே. அவ்வளவையும் என்ன செய்தாய்?''

''என்ன செய்தேனும்?'' என்று சிறுவன் முறையிட்டான். ''நீதான் பாதியை திருப்பிக் கேட்டு வாங்கிக் கொண்டாயே.''

''கொடி கட்டாமல் துணியை எப்படிக் காய வைப்பேனும் நான்?''

''பிறகு தூண்டிலுக்குக் கயிறு வேண்டுமென்று எஞ்சியிருந்ததில் பாதியை அண்ணன் எடுத்துக் கொண்டுவிட்டான்.''

''ஆமாம், உன் அண்ணனுக்கு நீ மறுக்காமல் தரத்தான் வேண்டும்.''

''மறுக்காமல்தான் தந்தேன். பிறகு பாக்கி இருந்ததில் கால்சட்டை வாருக்கு வேண்டுமென்று அப்பா பாதியை வாங்கிக் கொண்டார். அப்புறம் அக்காள் வேறு தன் தலைச் சடைகளுக்கு வேண்டுமென்று ஐந்தில் இரு பங்கை எடுத்துக் கொண்டாள்....''

''மீந்ததை என்ன செய்தாய் நீ?''

''என்ன மீந்தது? 30 சென்டிமீட்டர் மீந்தது—அதை வைத்துக்கொண்டு தொலைபேசி செய்து விளையாடமுடியுமா, சொல்லு!''

உருண்டையில் ஆரம்பத்தில் இருந்த கயிறு எவ்வளவு?

25. கையுறையும் காலுறையும்.—

ஒரு பெட்டியில் 10 ஜதை பழுப்புக் காலுறையும், 10 ஜதை கறுப்புக் காலுறையும் இருக்கின்றன; இன்னொரு பெட்டியில் இதே அளவு பழுப்புக் கையுறையும் கறுப்புக் கையுறையும் இருக்கின்றன. ஒரே நிறத்தில் ஒரு ஜதை காலுறையும் ஒரு ஜதை கையுறையும் பொறுக்கிச் சேர்ப்பதற்கு இரு பெட்டிகளிலும் இருந்து எத்தனைக் காலுறைகளும் கையுறைகளும் எடுத்தாக வேண்டும்?

26. தலை மயிரின் ஆயுட் காலம்.—

சராசரி மனிதன் ஒருவன் தலையிலுள்ள முடியின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு? சுமார் 1,50,000*. மாதத்துக்கு 3,000 முடி வீதம் தலையிலிருந்து விழுந்துவிடுவதாய்க் கணக்கிடப்பட்டிருக்கிறது.

அப்படியானால், மனிதனின் தலையிலுள்ள முடி ஒன்றின் சராசரி ஆயுள் எவ்வளவு என்று உங்களால் கணிக்கமுடியுமா?

27. சம்பாத்தியம்.—

மிகைநேரச் சம்பள வருவாயையும் சேர்த்து சென்ற வாரம் எனக்குக் கிடைத்தது 50 ரூபிள். எனது அடிப்படைச் சம்பளம் மிகைநேரச் சம்பளத்தைவிட 40 ரூபிள் அதிகமெனில், மிகைநேரச் சம்பளத்தைச் சேர்க்காமல் எனது சம்பாத்தியம் எவ்வளவு?

28. பனிச் சறுக்கு.—

மணிக்கு 10 கிலோமீட்டர் வேகத்தில் சறுக்கிச் சென்றால் குறிப்பிட்ட ஓர் இடத்துக்குப் பிற்பகல் 1 மணிக்குத் தாம் போய்ச் சேர்ந்துவிடலாம், மணிக்கு 15 கிலோமீட்டர் வேகத்தில் சென்றால் காலை 11 மணிக்கே போய்ச் சேர்ந்துவிடலாம் என்று ஒருவர் கணக்கிட்டார். நண்பகல் 12 மணிக்கு அவர் அவ்விடத்துக்குப் போய்ச் சேர வேண்டுமானால், எவ்வளவு வேகத்தில் அவர் சறுக்கிச் செல்ல வேண்டும்?

29. இரு தொழிலாளர்கள்.—

ஒருவர் வயது முதிர்ந்தவரும் ஒருவர் இளைஞருமான இரு தொழிலாளர்கள் ஒரே வீட்டில் வசித்தார்கள், ஒரே ஆலைக்குச் சென்று வேலை செய்தார்கள். ஆலைக்கு நடந்து

---

* இந்த எண்ணிக்கை எப்படி கிடைத்தது என்று கேட்கலாம். அவ்வளவையும் எண்ணிக் கணக்கிட்டா இது பெறப்பட்டது? இல்லை. தலையில் ஒரு சதுர சென்டிமீட்டரில் எத்தனை முடி என்று எண்ணினால் போதும். பிறகு முடியுள்ள தலைப் பரப்பின் அளவு தெரியுமாயின், முடிகளின் மொத்த எண்ணிக்கையைச் சுலபமாய்க் கணக்கிட்டுவிடலாம். காட்டிலுள்ள மரங்களைக் கணக்கிட வனவியலாளர்கள் கையாளும் முறையைத்தான் உடற் கூற்றியலாளர்களும் கையாளுகிறார்கள்.

செல்ல இளைஞருக்கு 20 நிமிடம் ஆகிறது. முதியவர் இந்தத் தொலைவை 30 நிமிடங்களில் நடக்கிறார். இளைஞரைவிட ஐந்து நிமிடம் முன்னதாகவே முதியவர் புறப்படுவாராயின், இளைஞர் அவரை எந்நேரத்தில் எட்டிப் பிடிப்பார்?

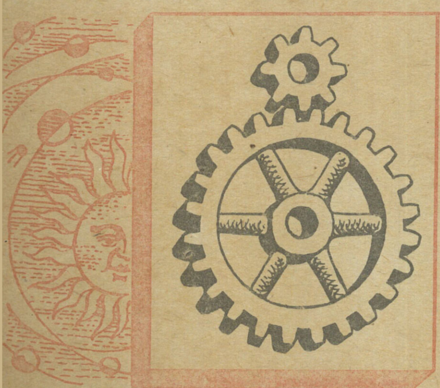
30. தட்டச்சு அடித்தல்.—

ஓர் அறிக்கையை இரு பெண்கள் தட்டச்சு அடிக்க வேண்டியிருந்தது. அதிக அனுபவசாலியான பெண்ணுக்கு இவ்வேலையைச் செய்ய இரண்டு மணி நேரமும், மற்றவளுக்கு மூன்று மணி நேரமும் தேவை.

மிகக் குறைந்த நேரத்தில் இருவருமாய்ச் சேர்ந்து முடிக்கும்படியான விதத்தில் இவ்வேலையைத் தம்முள் பகிர்ந்து கொள்வார்களாயின், அவர்கள் இதைச் செய்து முடிக்க எவ்வளவு நேரம் தேவையாய் இருக்கும்?

இம்மாதிரியான கணக்குகளைப் போடுவதற்குரிய வழக்கமான முறை வருமாறு: ஒவ்வொரு பெண்ணும் ஒரு மணி நேரத்தில் இவ்வேலையில் செய்து முடிக்கும் பங்கைக் கணக்கிட்டு, இரு பங்குகளையும் கூட்ட வேண்டும்; இந்தக் கூட்டுத் தொகையால் 1ஐ வகுக்க வேண்டும். இந்தக் கணக்குக்கு விடை காண இதன்றி புதிய வழி ஒன்றை உங்களால் ஊகித்துச் சொல்ல முடியுமா?

31. இரு பல் சக்கரங்கள்.—



எட்டுப் பற்களைக் கொண்ட ஒரு பல்சக்கரம் 24 பற்களைக் கொண்ட மற்றொன்றுடன் இணைக்கப் பட்டிருக்கிறது (படம் 19). பெரிய சக்கரத்தை ஒரு தரம் சுற்றிவர சிறியது அதன் அச்சை மையமாய்க் கொண்டு எத்தனைச் சுற்றுகள் சுற்ற வேண்டும்?

படம் 19. சிறிய பல் சக்கரம் எத்தனை தரம் சுற்றியாக வேண்டும்?

32. வயது எவ்வளவு?—

புதிர்களில் ஆர்வங் கொண்டவரை வயது எவ்வளவு என்று கேட்டதும், அவர் புதிரான முறையில் பதிலளித்தார்:

''மூன்று ஆண்டுகளுக்குப் பிற்பாடு எனக்கு என்ன வயது ஆகுமோ அதை மூன்றால் பெருக்கி, மூன்று ஆண்டுகளுக்கு முன்பு எனக்கு ஆன வயதைப் போல் மூன்று மடங்கான வயதைக் கழித்தால் எவ்வளவு வருமோ அதுதான் என் வயது.''

அப்படியானால் அவர் வயது என்ன?

33. மற்றொரு வயதுப் புதிர்.—

''சுந்தரத்துக்கு எத்தனை வயதாகிறது?'' என்று கேட்டார் என் நண்பர்.

''சுந்தரத்துக்கா? பதினெட்டு ஆண்டுகளுக்கு முன்பு அவருடைய வயது அவரது மகனுடையதைப் போல் மூன்று மடங்காய் இருந்தது.''

''ஆனால் இப்போது அவர் வயது அவரது மகனுடையதைப் போல் இரண்டு மடங்காய் அல்லவா இருக்கிறது?''

''ஆமாம், ஆகவே இருவரின் வயதையும் எளிதில் கணக்கிட்டுச் சொல்லிவிடலாம்.''

வாசகர்களே, உங்களால் சொல்ல முடியுமா?

34. கரைசல் தயாரித்தல்.—

ஒரு கோப்பையில் ஹைடிரோ கிலோரிக் அமிலம் இருக்கிறது, இன்னொரு கோப்பையில் அதே எடையுள்ள நீர் இருக்கிறது. முதல் கோப்பையிலிருந்து 20 கிராம் அமிலம் இரண்டாவது கோப்பையில் ஊற்றப்படுகிறது. பிறகு இரண்டாவது கோப்பையில் இருக்கும் திரவத்திலிருந்து மூன்றில் இரு பங்கு முதலாவது கோப்பையில் ஊற்றப்படுகிறது. இப்போது இரண்டாவது கோப்பையில் இருந்ததைக் காட்டிலும் நான்கு மடங்கு அதிகமான திரவம் முதலாவது கோப்பையில் இருக்கிறது. ஆரம்பத்தில் இருந்த அமிலம் எவ்வளவு, நீர் எவ்வளவு?

35. கடையில் செலவு செய்தது.—

நான் கடைக்குச் சென்ற போது என்னிடம் ரூபிள் நோட்டுகளும் 20 கோப்பெக் காசுகளுமாய் மொத்தம் சுமார் 15 ரூபிள் இருந்தது. திரும்பி வந்த போது, ஆரம்பத்தில் என்னிடம் எத்தனை 20 கோப்பெக் காசு இருந்ததோ அத்தனை ரூபிள் நோட்டும், ஆரம்பத்தில் எத்தனை ரூபிள் நோட்டு இருந்ததோ அத்தனை 20 கோப்பெக் காசும் இருந்தன. எடுத்துச் சென்ற பணத்தில் மூன்றில் ஒரு பங்கை நான் திருப்பிக் கொண்டு வந்தேன்.

நான் செலவு செய்தது எவ்வளவு?

பதில்கள் 24-35

24. சிறுவனின் தாய் பாதி எடுத்துக் கொண்டபின் பையனிடம் எஞ்சியது 1/2. அண்ணன் எடுத்துக் கொண்டபின் 1/4உம், அப்பா எடுத்துக் கொண்டபின் 1/8உம், அக்காள் எடுத்துக் கொண்டபின் $1/8 \times 3/5 = 3/40$உம் மீந்திருக்க வேண்டும். இந்த $3/40 = 30$ சென்டிமீட்டர் என்பதால், ஆதியில் இருந்த கயிறு $30 \div 3/40 = 400$ சென்டிமீட்டர், அல்லது 4 மீட்டர்.

25. காலுறைகளைப் பொறுத்தவரை மூன்று எடுத்தால் போதும், அவற்றில் எப்படியும் இரண்டு ஒரே நிறமுடையதாய் அமைந்து விடும். ஆனால் கையுறைகளின் விவகாரம் இவ்வளவு சுலபமல்ல, ஏனெனில் இவை மாறுபடுவது நிறத்தில் மட்டுமல்ல; ஒவ்வொரு ஜதையிலும் ஒன்று இடது கைக்கும் மற்றொன்று வலது கைக்குமாய் இருப்பதன் காரணமாகவும் இவை மாறுபடுகின்றன. ஆகவே 21 கையுறைகளாவது எடுத்தாக வேண்டும். இதற்குக் குறைவாய், உதாரணமாய் 20 கையுறைகளை எடுத்தால், அவை யாவும் இடது கைக்கான உறைகளாய் (பத்து பழுப்பும், பத்து கறுப்புமாய்) இருக்கக் கூடும்.

26. இறுதியில் விழும் முடிதான் இன்று மிக இளையதாய் இருப்பதாகும், அதாவது ஒரு நாள் வயதுடையதாய் இருப்பதாகும்.

கடைசி முடியும் விழுவதற்கு எவ்வளவு காலமாகும் என்பதைக் கணக்கிடலாம். முதல் மாதத்தில் ஒருவன் தனது

தலையிலுள்ள 1,50,000 முடிகளில் 3,000ஐ இழந்துவிடுகிறான். முதல் இரண்டு மாதங்களில் 6,000ஐயும், முதல் ஆண்டில் $3,000 \times 12 = 36,000$ஐயும் இழக்கிறான். ஆகவே கடைசி முடியும் விழுவதற்கு நான்கு ஆண்டுகளுக்குச் சற்று அதிகமான காலமாகும். மனிதனது தலை முடிகளின் சராசரி ஆயுள் இதுவே.

27. சிந்திக்காமலே பலரும் 40 ரூபிள் என்பார்கள். இது சரியல்ல, ஏனெனில் அப்போது அடிப்படைச் சம்பளம் மிகைநேரச் சம்பளத்தைவிட 30 ரூபிளே அதிகமாய் இருக்கும், 40 ரூபிள் அல்ல.

இந்தக் கணக்குக்கு விடை காண வேண்டிய முறை வருமாறு: மிகைநேரச் சம்பளத்துடன் 40 ரூபிளைச் சேர்த்தால் அடிப்படைச் சம்பளம் தெரியவரும் என்பதை அறிவோம். ஆகவே 50 ரூபிளுடன் 40 ரூபிளைச் சேர்த்தால் அது இரு மடங்கு அடிப்படைச் சம்பளத்துக்குச் சமம். ஆனால் $50 + 40 = 90$. அதாவது இரு மடங்கு அடிப்படைச் சம்பளம் 90 ரூபிள். எனவே மிகைநேரச் சம்பளத்தைச் சேர்க்காமல் எனது அடிப்படைச் சம்பளம் 45 ரூபிளும், மிகைநேரச் சம்பளம் 5 ரூபிளும் ஆகும்.

சரிதானா பார்ப்போம்: $45 + 5 = 50$; கணக்கில் கூறப்படுவதும் இதுவேதான்.

28. இரண்டு காரணங்களால் இந்தக் கணக்கு சுவையானதாகிறது. முதலாவதாய், மணிக்குப் 10 கிலோமீட்டர் வேகம், மணிக்கு 15 கிலோமீட்டர் வேகம் ஆகிய இரு வேகங்களின் சராசரியான மணிக்கு 12.5 கிலோமீட்டர் வேகமே இங்கு நமக்கு வேண்டிய வேகம் என்பதாய் எவரும் எளிதில் முடிவு செய்துவிடும்படி அமைந்திருக்கிறது இந்தக் கணக்கு. இம்முடிவு சரியல்ல. சறுக்கிச் செல்கிறவர் கடக்க வேண்டிய தொலைவு a கிலோமீட்டர் ஆகுமாயின், மணிக்கு 15 கிலோமீட்டர் வேகத்தில் செல்லும் போது இந்தத் தொலைவைக் கடக்க அவருக்கு வேண்டிய நேரம் $\frac{a}{15}$ மணி; மணிக்கு 10 கிலோமீட்டர் வேகத்தில் செல்கையில் அவருக்கு வேண்டிய நேரம் $\frac{a}{10}$. மணிக்கு 12.5 கிலோமீட்டர் வேகத்தில் செல்வாராயின் அவர் இத்தொலைவைக் கடக்க $\frac{a}{12^1/_2}$ அல்லது $\frac{2a}{25}$

மணி வேண்டியிருக்கும். இதிலிருந்து நமக்குக் கிடைக்கும் சமன்பாடு:

$$\frac{2a}{25}-\frac{a}{15}=\frac{a}{10}-\frac{2a}{25};$$

ஏனெனில் இரு பக்கங்களும் ஒரு மணி நேரத்துக்குச் சமம் என்பது நமக்குத் தெரியும்.

a இரு பக்கங்களுக்கும் பொதுவாய் இருப்பதால் அதை விலக்குவோமாயின்

$$\frac{2}{25}-\frac{1}{15}=\frac{1}{10}-\frac{2}{25},$$

அதர்வது

$$\frac{4}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{10};$$

இந்தச் சமன்பாடு சரியல்ல, ஏனெனில்

$\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{1}{6}$; அதாவது $\frac{4}{24}$ ஆகுமே அன்றி $\frac{4}{25}$ ஆகாது.

இந்தக் கணக்கு சுவையானதாய் இருப்பதற்கு இன்னொரு காரணம் என்னவென்றால், சமன்பாடுகள் இல்லாமலே பின்வருமாறு மனக் கணக்காகவே இதற்கு விடை கண்டு விடலாம்.

மணிக்கு 15 கிலோமீட்டர் வேகத்தில் இலக்கை அடைவதற்கு ஆகும் நேரத்துக்கு அதிகமாய் 2 மணிநேரம் சறுக்கிச் செல்வாராயின் (அதாவது மணிக்கு 10 கிலோமீட்டர் வேகத்தில் இலக்கை அடைய ஆகும் நேரத்துக்குச் சறுக்கிச் செல்வாராயின்), கூடுதலாய் 30 கிலோமீட்டரைக் கடப்பார். ஆனல் ஒரு மணி நேரத்தில் அவர் 5 கிலோமீட்டர் கூடுதலாய்க் கடப்பார் என்பது நமக்குத் தெரியும். ஆகவே, கூடுதலாய் 30 கிலோமீட்டரைக் கடக்க அவருக்கு ஆகும் நேரம் $30 \div 5 = 6$ மணி. மணிக்கு 15 கிலோமீட்டர் வேகத்தில் அவர் இலக்கை அடைவதற்கு ஆகும் நேரம் தெரிந்துவிடுகிறது: $6-2=4$ மணி. இந்த 4 மணி நேரத்தில் அவர் கடக்கும் தொலைவு: $15 \times 4 = 60$ கிலோமீட்டர்.

இலக்கை 12 மணிக்கெல்லாம், அதாவது 5 மணி நேரத்தில் அடைய வேண்டுமாயின் அவர் எந்த வேகத்தில் செல்ல வேண்டுமென்பது தெரிந்து விடுகிறது:

$$60 \div 5 = 12 \text{ கிலோமீட்டர்.}$$

இந்த விடை சரிதானு என்று எளிதில் சோதித்துப் பார்க்க முடியும்.

29. சமன்பாடுகளை உபயோகிக்காமல் இந்தக் கணக்குக்குப் பல வழிகளில் விடை காண முடியும்.

முதலாவது வழி: ஐந்து நிமிடத்தில் இளம் தொழிலாளி தொலைவில் 1/4 பங்கைக் கடக்கிறுர்; ஆனுல் வயது முதிர்ந்த தொழிலாளி 1/6 பங்கையே கடக்கிறுர், அதாவது இளம் தொழிலாளியைவிட $\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$ பங்கு குறைவாய்க் கடக்கிறுர்.

இளைஞர் புறப்படும் முன்பே வயதானவர் 1/6 பங்குத் தொலைவைக் கடந்துவிடுவதால், இளைஞர் அவரை எட்டிப் பிடிக்க ஆகும் நேரம் $\frac{1}{6} \div \frac{1}{12}=2$ ஐந்து நிமிடங்கள், அதாவது 10 நிமிடங்கள்.

இரண்டாவது வழி இன்னும் சுலபமானது: ஆலைக்குப் போய்ச் சேர வயதானவருக்கு இளைஞரைக் காட்டிலும் 10 நிமிடம் கூடுதலாய் ஆகிறது. இளைஞரைவிட 10 நிமிடம் முன்னதாகவே வயதானவர் புறப்படுவாராயின், இருவரும் ஏககாலத்தில் ஆலைக்குப் போய்ச் சேருவார்கள். வயதானவர் 5 நிமிடமே முன்னதாய்ப் புறப்படுவதால், இளைஞர் அவரைச் சரிபாதி வழியில் எட்டிப் பிடிப்பார், அதாவது புறப்பட்டு 10 நிமிடத்தில் எட்டிப்பிடிப்பார் (ஏனெனில் முழுத் தொலைவையும் கடக்க இளைஞருக்கு 20 நிமிடம் ஆகிறது).

இவ்விரண்டு வழிகளை அன்றி மற்றும் பல எண் கணித வழிகளிலும் இந்தக் கணக்குக்கு விடை காணலாம்.

30. நூதன வழியில் இந்தக் கணக்குக்கு விடை காணும் முறை வருமாறு: இருவரும் ஒரே நேரத்தில் இவ்வேலையைச் செய்து முடிக்க எப்படி அவர்கள் இதைத் தம்மிடையே பகிர்ந்து கொள்ள வேண்டும் என்பதைக் கண்டுபிடிப்போம் (இவர்கள்

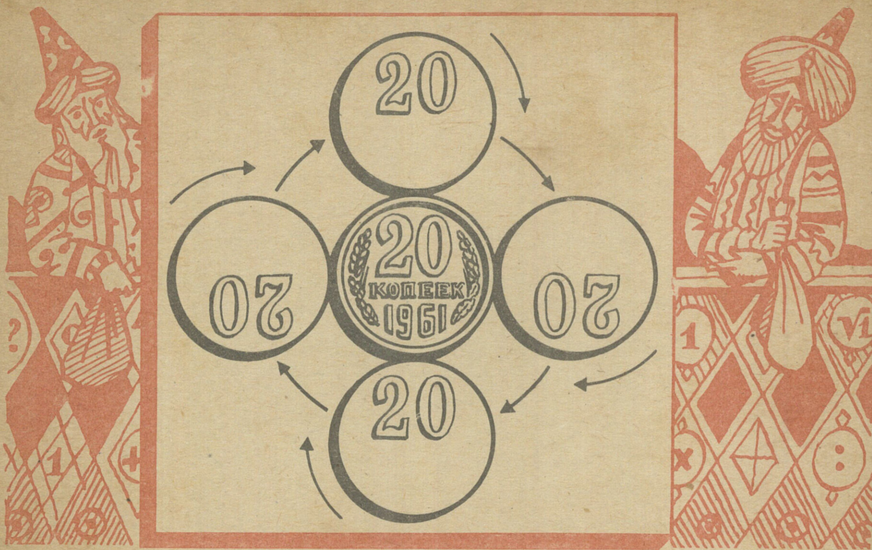
வீண் பொழுது போக்கவில்லையானால், வேலையை மிகவும் சீக்கிரமாய்ச் செய்து முடிக்க இது ஒன்றே வழி என்பது தெளிவு). அதிக அனுபவசாலியாய் இருக்கும் பெண் மற்றவளைக் காட்டிலும் $1\frac{1}{2}$ மடங்கு வேகமாய் வேலை செய்வதால், அவள் செய்யும் வேலையின் பங்கும் $1\frac{1}{2}$ மடங்கு கூடுதலாய் இருக்கும். வேலையில் இப்படிக் கூடுதலான பங்கை ஏற்பாளாயின், இருவரும் தத்தமது பங்கை ஏககாலத்தில் செய்து முடிப்பார்கள். ஆகவே அனுபவசாலியாய் இருப்பவள் 3/5 பங்கு வேலையையும், இரண்டாமவள் 2/5 பங்கு வேலையையும் ஏற்றுக் கொள்ள வேண்டும்.

இனி முதலாமவள் 3/5 பங்கு வேலையைச் செய்ய எவ்வளவு நேரமாகும் என்பதைக் கணக்கிட வேண்டும். முழு வேலையையும் செய்ய அவளுக்கு 2 மணி நேரம் வேண்டும் என்பது நமக்குத் தெரியும். ஆகவே 3/5 பங்கு வேலையைச் செய்ய அவளுக்கு வேண்டிய நேரம் $= 2 \times \frac{3}{5} = 1\frac{1}{5}$ மணி. இரண்டாமவளும் அவளது பங்கை இதே நேரத்தில் செய்து முடித்து விடுவாள்.

ஆகவே இருவரும் சேர்ந்து மிகவும் வேகமாய் இவ்வேலையைச் செய்து முடிப்பதற்குத் தேவைப்படு நேரம் 1 மணி 12 நிமிடம்.

31. சிறிய பல் சக்கரம் 3 தரம் சுற்ற வேண்டுமெனச் சொல்வீர்களாயின், நீங்கள் பெரும் தவறிழைக்கிறீர்கள். நான்கு தரம் சுற்றியாக வேண்டும்.

ஏன் இப்படி என்று பரிசீலிப்போம். ஒரு காகிதத்தின் மீது ஒரே பரிமாணமுள்ள இரு காசுகளை வையுங்கள்—இரண்டு 20 கோப்பெக் காசுகளை வைக்கிறீர்கள் என்று கொள்வோம் (படம் 20). பிறகு கீழ் மட்டத்திலுள்ள காசை நகரவிடாமல் கெட்டியாய் அழுத்திப் பிடித்துக் கொண்டு, அதைச் சுற்றி மேல் மட்டத்துக் காசை உருட்டுங்கள். மேல் மட்டத்துக் காசு கீழ் மட்டத்துக் காசின் அடிப் பகுதிக்கு வருவதற்குள் அது அதன் அச்சை மையமாய்க் கொண்டு ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றி முடிப்பதைக் கண்டு நீங்கள் வியப்புறுவீர்கள். காசின் மீது பதிக்கப்பட்டிருக்கும் அதன் மதிப்பைக் குறிக்கும்



படம் 20.

எண்ணின் நிலையிலிருந்து இதை நீங்கள் கண்டுகொள்ளலாம். மேல் மட்டத்துக் காசு கீழ் மட்டத்துக் காசை ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றி முடிக்கும்போது அது தனது அச்சை மையமாய்க் கொண்டு இரண்டு தரம் சுற்றி விடுகிறது.

பொதுவாய், ஒரு பொருள் ஒரு வட்டத்தைச் சுற்றி வருகையில் நாம் எண்ணக் கூடியதைக் காட்டிலும் அது ஒரு சுற்று அதிகமாய்ச் சுற்றுகிறது. சூரியனைச் சுற்றிவரும் பூமியானது அதன் அச்சை மையமாய்க் கொண்டு $365\frac{1}{4}$ நாட்கள் சுற்றுமல் $366\frac{1}{4}$ நாட்கள் சுற்றுவதற்கும் இதுவேதான் காரணம்—சூரியனைச் சார்ந்து அல்லாமல், நட்சத்திரங்களைச் சார்ந்து பூமியின் சுற்றுகளைக் கணக்கிடுவோமாயின் அது 366 1/4 நாட்கள் சுற்றுகிறது என்பது தெரியும். சூரிய வழி நாட்களைக் காட்டிலும் நட்சத்திர வழி நாட்கள் ஏன் குறுகலாய் இருக்கின்றன என்பதை இப்போது நீங்கள் புரிந்து கொள்ளலாம்.

32. எண் கணித வழியில் இந்தப் புதிருக்கு விடை காண்பது சிக்கலான காரியம். ஆனல் இயற்கணித முறையைக் கையாளுவோமாயின் சுலபமாய் விடை கண்டு விடலாம். இந்த

ஆளின் வயதை x என்று கொள்வோம். மூன்று ஆண்டுகளுக்குப் பிற்பாடு இவர் வயது $x + 3$, மூன்று ஆண்டுகளுக்கு முன்பு இவர் வயது $x - 3$. எனவே பின்வரும் சமன்பாடு கிடைக்கிறது:

$$3(x + 3) - 3(x - 3) = x.$$

இதிலிருந்து $x = 18$ என்று கணக்கிடுகிறோம். புதிரில் ஆர்வங் கொண்ட இந்த ஆளின் வயது 18 ஆகும்.

சரிபார்ப்போம்: மூன்று ஆண்டுக்குப் பிற்பாடு இவர் வயது 21; மூன்று ஆண்டுகளுக்கு முன்பு இவர் வயது 15. முன்னதை மூன்றால் பெருக்கி, பின்னதைப் போல் மூன்று மடங்கைக் கழித்தால் கிடைப்பது

$$(3 \times 21) - (3 \times 15) = 63 - 45 = 18.$$

33. முந்தியப் புதிரைப் போலவே இதற்கும் சமன்பாட்டின் மூலம் எளிதில் விடை கண்டுவிடலாம். மகனுக்கு x வயதாவதாய்க் கொள்வோமாயின், தந்தைக்கு இப்போது வயது 2x. 18 ஆண்டுகளுக்கு முன்பு இருவருக்கும் வயது 18 குறைவாய் இருந்திருக்கும்: தந்தையின் வயது $(2x - 18)$ ஆகவும், மகனின் வயது $(x - 18)$ ஆகவும் இருந்திருக்கும். அப்போது தந்தையின் வயது மகனுடையதைப் போல் மூன்று மடங்காய் இருந்ததால், பின்வரும் சமன்பாடு கிடைக்கிறது:

$$3(x - 18) = 2x - 18.$$

இதிலிருந்து $x = 36$ என்று கணக்கிடுகிறோம். மகனின் வயது 36; தந்தையின் வயது 72.

34. ஆரம்பத்தில் முதல் கோப்பையில் x கிராம் அமிலமும், இரண்டாவதில் x கிராம் நீரும் இருப்பதாய் வைத்துக் கொள்வோம். முதல் கோப்பையிலிருந்து இரண்டாவதில் ஊற்றிய பின், அமிலம் $(x - 20)$ கிராமாயிற்று; இரண்டாவதில் நீரும் அமிலமும் சேர்ந்து $(x + 20)$ கிராம் இருந்தது. இரண்டாவது கோப்பையிலிருந்து முதலாவதில் ஊற்றியபின், இரண்டாவதில் $\frac{1}{3}(x + 20)$ கிராம் திரவமும், முதலாவதில்

$$x - 20 + \frac{2}{3}(x + 20) = \frac{5x - 20}{3}$$

கிராம் திரவமும் இருக்கின்றன. இரண்டாவதில் இருப்ப தைக் காட்டிலும் முதலாவதில் நான்கு மடங்கு குறைவான திரவமே இருப்பதால்,

$$\frac{4}{3}(x+20)=\frac{5x-20}{3}.$$

இதிலிருந்து,

$$x=100.$$

அதாவது, ஆரம்பத்தில் ஒவ்வொரு கோப்பையிலும் 100 கிராம் இருந்தது.

35. ஆரம்பத்தில் என்னிடம் ரூபிள் நோட்டுகள் xஉம், 20 கோப்பெக் காசுகள் yஉம் இருந்ததாய்க் கொள்வோம்.

கடைக்குச் சென்ற போது என்னிடம் இருந்த தொகை

$$(100x+20y)$$ கோப்பெக்.

திரும்பி வந்தபோது என்னிடம் இருந்த தொகை

$$(100y+20x)$$ கோப்பெக்.

இரண்டாவது தொகை முதலாவது தொகையில் மூன்றில் ஒரு பங்காகும் என்பதால்,

$$3(100y+20x)=100x+20y.$$

இதிலிருந்து $x=7y$ என்று கணக்கிடுகிறோம்.

$y=1$ என்றால், $x=7$. இப்படிக் கொள்வோமாயின், கடைக்குச் சென்ற போது என்னிடம் 7.20 ரூபிள் இருந் திருக்க வேண்டும். இது சரியல்ல, ஏனெனில் அப்போது என் னிடம் ''சுமார் 15 ரூபிள் இருந்தது'' என்று இப்புதிர் கூறுகிறது.

$y=2$ என்று கொள்வோமாயின், என்ன ஆகிறதெனப் பார்ப்போம். இப்போது $x=14$. கடைக்குச் சென்ற போது இருந்த தொகை 14.40 ரூபிள். புதிரில் கூறப்படுவதற்கு இசைவாய் இருக்கிறது இது.

$y=3$ என்று கொள்வோமாயின், கடைக்கு சென்ற போது இருந்த தொகை 21.60 ரூபிள் ஆகும். இது புதிரில் கூறப் படுவதைவிட மிக அதிகமாகும்.

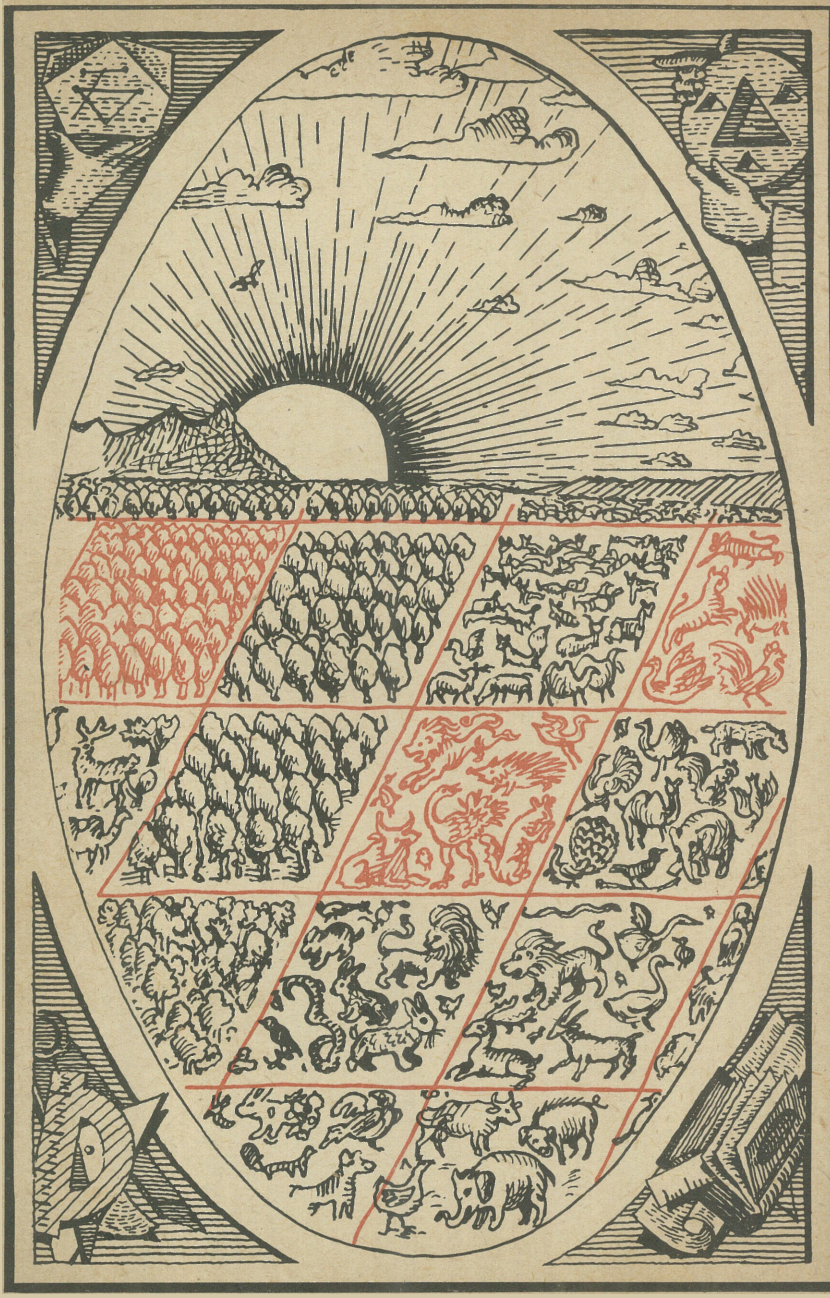
ஆகவே பொருத்தமான ஒரேயொரு விடை 14.40 ரூபிள். கடையிலிருந்து திரும்பிய போது என்னிடம் ரூபிள் நோட்டு கள் இரண்டும், 20 கோப்பெக் காசுகள் பதினான்கும் இருந் திருக்க வேண்டும், அதாவது $200 + 280 = 480$ கோப்பெக் இருந்திருக்கவேண்டும். இது ஆரம்பத்தில் என்னிடம் இருந்த தொகையில் மூன்றில் ஒரு பங்குதான் $(14.40 \div 3 = 4.80)$.

ஆகவே கடையில் நான் செலவு செய்தது

$14.40 - 4.80 = 9.60$ ரூபிள்.

எண்ணிக் கணக்கிட தெரியுமா?

012345675291528
389185010678496



36. எண்ணத் தெரியுமா?—

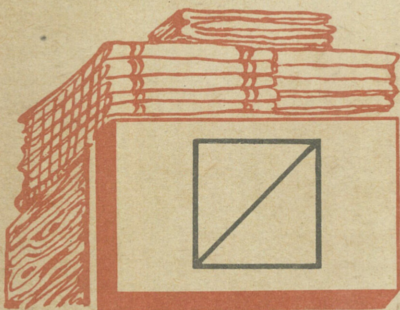
இப்படி ஒரு கேள்வி கேட்டால், மூன்று வயதுக்கு மேலான எந்தப் பிள்ளையும் தான் அவமதிக்கப்படுவதாகவே கருதும். ஒன்று, இரண்டு, மூன்று என்று எண்ணிச் செல்வது பெரிய காரியமல்ல என்பது மெய்தான். ஆயினும் சில நேரங்களில் எண்ணிக் கணக்கிடுவது அவ்வளவு சுலபமாய் இருப்பதில்லை. எல்லாம் எதை எண்ணிக் கணக்கிடுகிறோம் என்பதையே பொறுத்திருக்கிறது. உதாரணமாய், ஒரு பெட்டியிலுள்ள ஆணிகளை சுலபமாய் எண்ணிக் கணக்கிட்டு விடலாம். ஆனல் பெட்டியில் ஆணிகளுடன் கூட திருகாணிகளும் இருப்பதாய் வைத்துக் கொள்வோம். பெட்டியில் இருக்கும் ஆணிகள் எத்தனை, திருகாணிகள் எத்தனை என்று நீங்கள் எண்ணிக் கணக்கிட வேண்டியிருப்பதாய்க் கொள்வோம். அப்போது என்ன செய்வீர்கள்? ஆணிகளையும் திருகாணிகளையும் தனித் தனியே பிரித்தெடுத்து வைத்தா எண்ணுவீர்கள்?

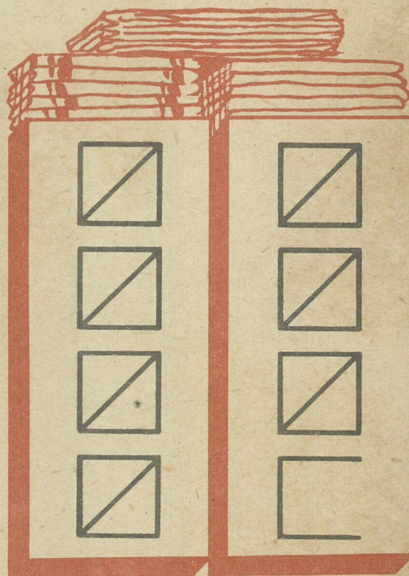
துணிகளைச் சலவைக்குப் போடும் போது பெண்களின் முன் இம்மாதிரியான ஒரு பிரச்சினை தான் எழுகிறது. துணிகளை அவர்கள் இன வாரியாய்ப் பிரித்து எண்ண வேண்டியிருக் கிறது. சட்டை, துண்டு, தலையணை உறை இப்படி இனம் இனமாய்ப் பிரித்துக் கொள்ள வேண்டியிருக்கிறது. இந்தத் தொல்லை பிடித்த வேலையைச் செய்தபின் ஒவ்வொன்றிலும் எத்தனை உருப்படி என்று எண்ண ஆரம்பிக்கிறார்கள்.

இதே முறையைக் கையாண்டுதான் நீங்கள் பொருள்களை எண்ணிக் கணக்கிடுவீர்கள் என்றால், உங்களுக்கு எண்ணத் தெரியாது என்றுதான் சொல்ல வேண்டும். இந்த முறை எக்கச்சக்கமானது, சில நேரங்களில் நடைமுறை சாத்திய மல்லாதது. ஆணிகளையோ, துணிகளையோ எண்ணிக்கணக்கிடு வது கடினமல்ல, எளிதில் இனவாரியாய்ப் பிரித்து எண்ணிவிட லாம். ஆனல் ஒரு பெரிய தோப்பில் மா, தென்னை, பலா, புளிய மரம் போன்ற பல வகையான மரங்களும் ஹெக்டருக்கு எத்தனை வீதம் இருக்கின்றன என்று எண்ணிக் கணக்கிட வேண்டியிருப்பதாய் வைத்துக் கொள்ளுங்கள். மரங்களை இனவாரிப் பிரித்தெடுப்பது சாத்தியமன்று. என்ன செய்வீர் கள்? மா, தென்னை, பலா, புளிய மரம் ஆகியவற்றை தனித் தனியே எண்ணிக் கணக்கிட்டுச் செல்லவா போகிறீர்கள்?

அப்படியானால், அந்தப் பெரிய தோப்பைச் சுற்றி நான்கு தரம் அல்லவா நடந்து வர வேண்டியிருக்கும்?

ஒரே நடையில் மரங்களை இனவாரியாய் எண்ணிச் செல்ல சுலபமான வழி ஒன்று இருக்கிறது. ஆணிகளையும் திருகாணிகளையும் வைத்துக் கொண்டு இந்த வழியை உங்களுக்கு விளக்கிச் சொல்கிறேன்.





படம் 21. கோட்டுக் குறிகளை ஐந்து ஐந்தாய் இணைத்துக் குறித்துச் செல்லலாம்.

படம் 22. சிறு சதுரங்களைக் கொண்டு எண்ணிக் கணக்கிடுதல்.

பெட்டியிலுள்ள ஆணிகளையும் திருகாணிகளையும் தனித் தனியே பிரித்தெடுக்காமல் அவற்றை இனவாரியாய் எண்ணிக் கணக்கிட முதலில் நீங்கள் ஒரு பென்சிலையும் அடியிற் கண்டவாறு பத்தியிடப்பட்ட ஒரு காகிதத்தையும் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்:

ஆணி	திருகாணி

பிறகு எண்ண ஆரம்பியுங்கள். பெட்டியிலிருந்து ஒன்றை எடுங்கள், அது ஆணியாய் இருந்தால், அதற்குரிய பத்தியில் பென்சிலால் ஒரு கோட்டுக் குறியிட்டுக் கொள்ளுங்கள். எடுத்தது திருகாணியாய் இருந்தால் இதே

மாதிரி 'திருகாணிப்' பத்தியில் கோட்டுக் குறியிடுங்கள். பெட்டியிலுள்ளவற்றை ஒன்று பாக்கியில்லாமல் எடுத்து முடிக்கும் வரையில் இப்படி தக்க பத்திகளில் குறியிட்டுச் செல்லுங்கள். இதன் முடிவில் 'ஆணிப்' பத்தியில் உள்ள கோட்டுக் குறிகள் பெட்டியில் ஆணிகள் எத்தனை இருந்தன என்பதையும், 'திருகாணிப்' பத்தியில் உள்ள கோட்டுக் குறிகள் பெட்டியில் திருகாணிகள் எத்தனை இருந்தன என்பதைக் காட்டும். இனி அந்தந்தப் பத்தியிலுமுள்ள கோட்டுக் குறிகளை எண்ணிக் கணக்கிட்டால் போதும் வேலை முடிந்துவிடும்.

இந்தக் கோட்டுக் குறிகளைப் படம் 21ல் காட்டியிருப்பது போல் ஐந்து கோட்டுக் குறிகளாலாகிய சிறு சதுரங்களின் வடிவில் குறித்துச் சென்றால் இவற்றை எண்ணிக் கணக்கிடு வது சுலபமாகவும் சடுதியிலும் முடிவுறும் வேலையாகிவிடும்.

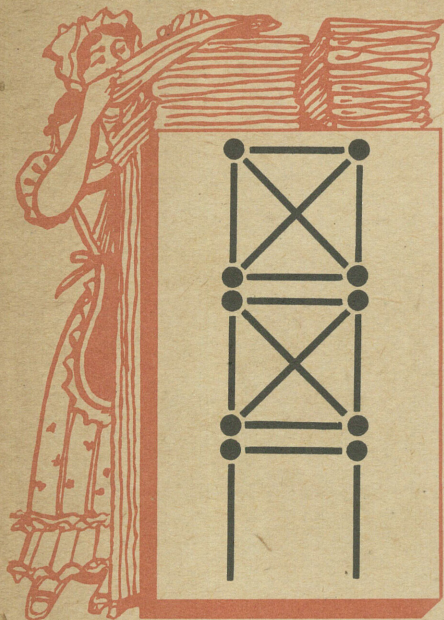
இம்மாதிரியான சதுரங்களை ஜோடி ஜோடியாய் இணைந்து அமையும்படி குறித்துச் செல்வது நல்லது, அதாவது பத்துக் கோட்டுக் குறிகளை வரிசையாய் இரு சதுரங்களாய்க் குறித் துச் சென்றதும் பதினொன்றாவது கோட்டுக் குறியை ஒரு புதிய வரிசையில் குறிக்க வேண்டும். இரண்டாவது வரிசை யில் இரு சதுரங்கள் பூர்த்தியானதும் மூன்றாவது வரிசையை யும், இதே போல் அடுத்தடுத்த வரிசைகளையும் துவக்கிச் செல்ல வேண்டும். இப்படி நீங்கள் குறித்துச் செல்லும் கோட்டுக் குறிகள் படம் 22ல் காட்டப்பட்டிருப்பது போல் அமைந்திருக்கும்.

இவற்றை எண்ணிக்கணக்கிடுவது சுலபமாகிவிடுகிறது: 10 கோட்டுக் குறிகளைக் கொண்ட சதுர வரிசைகள் மூன் றும், 5 ஐக் கொண்ட ஒரு சதுரமும், 3ஐக் கொண்ட குறைச் சதுரம் ஒன்றும் இருப்பது பார்த்ததுமே தெரிவ தால், எளிதில் கூட்டி விடையைப் பெறுகிறோம்:

$$30 + 5 + 3 = 38.$$

இதர வடிவங்களையும் கையாண்டு நாம் இவ்வேலையைச் செய்யலாம். உதாரணமாய் 10ஐக் குறிக்க படம் 23ல் காட்டப்படும் சதுர வடிவைக் கையாளலாம்.

ஒரு பெரிய தோப்பிலுள்ள பல வகையான மரங் களையும் எண்ணிக் கணக்கிடுவதற்கும் இதே முறையைக் கையாளலாம். ஆனால் இங்கு இரண்டுக்குப் பதிலாய், கூடுதலான பத்திகளை இட்டுக் கொள்ள வேண்டியிருக்கும்:



படம் 23. ஒவ்வொரு சதுர வடிவமும் 10ஐக் குறிக்கிறது.

செங்குத்துப் பத்திகளுக்குப் பதிலாய் கிடைமட்ட பத்திகளாய் இட்டுக் கொள்வோமாயின் வசதியாய் இருக்கும். படம் 24ல் காட்டப்படும் பத்திகள் இதற்கு உதாரணம்.

இந்தப் பத்திகளில் கோட்டுக் குறிகள் குறித்து முடிக்கப்பட்டதும் கிடைக்கும் அட்டவணையைப் படம் 25 காட்டுகிறது.

இனி ஒவ்வொரு பத்திக்குமுரிய மரங்களின் எண்ணிக்கையை எளிதில் கண்டுகொண்டுவிடலாம்:

மாமரம்	53
தென்னை	79
பலா	46
புளியமரம்	37

ஒரு சொட்டு இரத்தத்திலுள்ள சிவப்பு, வெள்ளை இரத்த அணுக்களை எண்ணிக் கணக்கிட மருத்துவத் துறையினர் இதே முறையைத்தான் கையாளுகிறார்கள்.

சலவைக்குப் போடப்படும் துணிகளை இனவாரியாய் எண்ணிக் குறிப்பதற்கும் இம் முறையைக் கையாண்டால் பெண்கள் நேரத்தையும் முயற்சியையும் பெருமளவு மிச்சப்படுத்த முடியும்.

குறிப்பிட்ட நிலப் பரப்பில் வளர்ந்திருக்கும் பல வகையான மலர்ச் செடிகளை எண்ணிக் கணக்கிடுவதற்கும் இதுவே சிறந்த வழியாகும். ஒவ்வொரு செடி வகைக்கும் ஒரு பத்தி அமைத்து ஓர் அட்டவணையைத் தயாரித்துக் கொள்ளுங்கள். எதிர்பாராத முறையில் இப்பரப்பில் தென்படக் கூடிய செடி வகைகளுக்காக சில பத்திகளை ஒதுக்கி வைத்திருங்கள். இம் மாதிரியான ஓர் அட்டவணையைப் படம் 26ல் காணலாம்.

37. காட்டிலுள்ள மரங்களை எதற்காக எண்ண வேண்டும்?—

எதற்காக இவ்வேலை? நகரவாசிகள் பலரும் இதை நடைமுறை சாத்தியமான காரியமாய்க் கருத மாட்டார்கள். லேவ்

மாமரம்	
தென்னை	
பலா	
புளியமரம்	

படம் 24. மரங்களை எண்ணிக் கணக்கிடுவதற்கான அட்டவணை.

தல்ஸ்தோயின் ''ஆன்னா கரீனினா''வில் வேளாண்மையில் அனுபவசாலியாகிய லேவின் காடு ஒன்றை விற்க விரும்பும் ஒப்லான்ஸ்கியுடன் உரையாடுவதைப் படிக்கிறோம்.

''மரங்களை எண்ணிக் கணக்கிட்டுவிட்டாயா?'' என்று ஒப்லான்ஸ்கியைக் கேட்கிறார் லேவின்.

''என்ன? காட்டிலுள்ள மரங்களை எண்ணிக் கணக்கிடுவதாவது?'' என்கிறார் வியப்புற்றுவிட்ட ஒப்லான்ஸ்கி. ''கடற்கரையிலுள்ள மணலையும் கிரகங்களது ஒளிக் கற்றைகளையும் எண்ணிக் கணக்கிடலாமே—மாமேதைகள்தான் செய்ய வேண்டும்....''

''இல்லை'' என்று இடைமறிக்கிறார் லேவின். ''மாமேதைக்குரிய இந்த காரியத்தை நமது வணிகர் ரியாபினின் வெற்றிகரமாய்ச் செய்திருக்கிறாரே. எண்ணிக் கணக்கிடாமல் எந்த வணிகரும் விலை கொடுத்து வாங்கமாட்டார்.''

மொத்தம் எத்தனைச் சதுர மீட்டர் பரிமாணமுள்ள மரத் துண்டுகள் கிடைக்கும் என்று மதிப்பிடுவதற்காகக் காட்டிலுள்ள மரங்களை எண்ணிக் கணக்கிடுகிறார்கள்.

மாமரம்	⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊓ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠
தென்னை	⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ □
பலா	⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ |
புளியமரம்	⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ Γ

படம் 25. கோட்டுக் குறிகள் குறித்து முடிக்கப்பட்டதும் கிடைக்கும் அட்டவணை.

தாமரை	
பொற்குவளை	
தாழம்பூ	
நிலாம்பரம்	
செம்பருத்தி	

படம் 26. மலர்ச்செடிகளை எண்ணிக் கணக்கிடும் முறை.

இதற்குக் காட்டிலுள்ள எல்லா மரங்களையும் எண்ணவேண்டிய தில்லை, மரங்களின் அடர்த்தியிலும் பருமனிலும் சராசரியைக் குறிக்கும்படியான ஓர் இடத்தைத் தெரிந்தெடுத்துக் கொண்டு அங்கு 0.25 அல்லது 0.5 ஹெக்டர் பரப்பிலுள்ள மரங்களை எண்ணினல் போதும். இதற்கு அனுபவம் அவசியம் என்பதைக் கூறத் தேவையில்லை. அந்தந்த வகையிலும் எத்தனை மரங்கள் இருக்கின்றன என்று தெரிந்து கொண்டால் போதாது, இம்மரங்களின் பருமன் எவ்வளவு என்பதும் தெரிய வேண்டும். எளிதாக்கப்பட்ட நமது உதாரணத்தில் குறிக்கப்படும் நான்கு பத்திகளைக் காட்டிலும் அதிகமாய் வேண்டியிருக்கலாம். இங்கு நாம் விவரித்திருக்கும் முறையைக் கையாளாது சாதாரண முறையில் மரங்களை எண்ணிக் கணக்கிட முயன்றல் எத்தனை தரம் காட்டினுள் சுற்றிச் செல்ல வேண்டியிருக்கும், இது எவ்வளவு கடினமான வேலை என்பதை நீங்கள் எளிதில் ஊகித்துக் கொள்ளலாம்.

ஒரே வகையானவற்றை எண்ணிக் கணக்கிடுவது எளிய காரியமே. ஆனல் எண்ணிக் கணக்கிட வேண்டியவை ஒரே வகைப்பட்டனவாய் இல்லாதிருக்கையில், இங்கே விவரிக்கப்பட்ட முறையையே நாம் கையாள வேண்டும்—இம்மாதிரி ஒரு முறை இருக்கிறது என்பதே பலருக்கும் தெரிந்திருக்காது.

5

திணறடிக்கும் எண்கள்

38. ஐந்து ரூபிள் கொடுத்து நூறு ரூபிள் பெறுங்கள்.—

வித்தைக்காரர் ஒருவர் தம்மெதிரே கூடியிருந்தோர் திகைக்கும் வண்ணம் பின்வருமாறு வாக்குறுதி அளித்தார்:

''50-கோப்பெக், 20-கோப்பெக், 5-கோப்பெக் ஆகிய காசுகளில் இருபதைக் கொண்டு எனக்கு 5 ரூபிள் கொடுக்கிறவருக்கு நான் 50 ரூபிள் தருவேன். 5 ரூபிளைக் கொடுத்து 100 ரூபிளைப் பெறுங்கள்! முன்வருகிறவர் யார்?''

மண்டபத்தில் கூடியிருந்தோர் வாய் திறக்கவில்லை. பென்சிலையும் காகிதத்தையும் எடுத்துக் கணக்குப் போட்டுப் பார்த்தார்கள் சிலர். ஆனால் வித்தைக்காரரின் வாக்குறுதியை யாரும் நம்பத் தயாராயில்லை.

''நூறு ரூபிள் பெறுவதற்கு ஐந்து ரூபிள் செலவிடுவது அதிகம் என்று நினைக்கிறீர்கள்?'' என்று கேட்டார் வித்தைக்காரர். ''அப்படியானால் இருபது காசுகளில் 3 ரூபிள் கொடுங்கள் போதும், உங்களுக்கு நான் 100 ரூபிள் தருகிறேன்'' என்று அவர் அறிவித்தார்.

அப்போதும் யாரும் முன்வரவில்லை.

''மூன்று ரூபிள்கூட அதிகம் என்று நினைக்கிறீர்கள்? சரி, இன்னும் ஒரு ரூபிள் குறைத்துக் கொள்ளலாம்—20 காசுகளில் 2 ரூபிள் கொடுங்கள் போதும்.''

அப்போதும் யாரும் முன்வருவதாய் இல்லை. வித்தைக்காரர் கூறினார்:

''சில்லறைக் காசு உங்களிடம் இல்லையோ, என்னவோ, உங்களை நான் நம்புகிறேன்—ஒவ்வொரு வகைக் காசிலும் எனக்கு நீங்கள் எத்தனை கொடுப்பீர்கள் என்பதைக் காகிதத்தில் குறித்துக் காட்டுங்கள் போதும்.''

ஒவ்வொரு வகையிலும் எத்தனைக் காசு தர வேண்டுமென்பதைக் குறித்து அனுப்பும் வாசகர் ஒவ்வொருவருக்கும் 100 ரூபிள் தருவதாய் நானும் உங்களுக்கு வாக்குறுதி அளிக்கிறேன்.

39. ஓர் ஆயிரம்.—

ஒரே மாதிரியான எட்டு இலக்கங்களைக் கொண்டு ஓர் ஆயிரத்தை எழுதிக் காட்ட முடியுமா? (இலக்கங்களுடன் கூட நீங்கள் கூட்டல், பெருக்கல் குறிகளையும் உபயோகித்துக் கொள்ளலாம்).

40. இருபத்தினான்கு.—

மூன்று எட்டுகளைக் கொண்டு பின்வருமாறு எளிதில் 24ஐக் குறிப்பிட முடியும்: $8 + 8 + 8$. வேறோர் இலக்கத்தை இதே போல் மூன்று தரம் கையாண்டு 24ஐக் குறிப்பிட முடியுமா? இந்தக் கணக்குக்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விடைகள் உண்டு.

41. முப்பது.—

மூன்று ஐந்துகளைக் கொண்டு 30ஐக் குறிக்க முடியும்: $5 \times 5 + 5$. ஒரே மாதிரியான வேறு மூன்று இலக்கங்களைக் கொண்டு 30ஐக் குறிப்பது அவ்வளவு சுலபமான காரியமல்ல. முயற்சி செய்து பாருங்கள். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விடைகள் உண்டு.

42. குறிக்கப்படாத இலக்கங்களைக் குறித்துக் காட்டுங்கள்.—

அடியிற் கண்ட பெருக்கலில் பாதிக்கு மேற்பட்ட இலக்கங்கள் குறிக்கப்படாமல் * குறியிட்டுக் காட்டப்படுகின்றன.

$$\begin{array}{r} *1* \\ \times\ 3*2 \\ \hline *3* \\ 3*2* \\ *2*5 \\ \hline 1*8*30 \end{array}$$

குறிக்கப்படாத இலக்கங்களை உங்களால் கண்டுபிடித்துச் சொல்ல முடியுமா?

43. இலக்கங்களைக் கண்டுபிடியுங்கள்.—

முந்தியதை ஒத்த இன்னொரு கணக்கு. குறிக்கப்படாத இலக்கங்களைக் கண்டுபிடியுங்கள்:

$$\begin{array}{r} **5 \\ \times\ 1** \\ \hline 2**5 \\ 13*0 \\ *** \\ \hline 4*77* \end{array}$$

44. வகுத்தல்.—

பின்வரும் வகுத்தலில் குறிக்கப்படாத இலக்கங்களைக் கண்டுபிடியுங்கள்:

```
325)   *2*5* (1**
     − ***
       ----
       *0**
     − *9**
       ----
         *5*
     −   *5*
       -----
```

45. பதினொன்றால் வகுத்தல்.—

பதினொன்றால் வகுபடும் எண் ஒன்றை வெவ்வேறான ஒன்பது இலக்கங்களைக் கொண்டு எழுதுங்கள்.

இம்மாதிரியான எண்களில் மிகப் பெரியதையும் மிகச் சிறியதையும் குறியுங்கள்.

46. விநோதமான பெருக்கல்.—

பின்வரும் பெருக்கலைக் கவனியுங்கள்:

$$48 \times 159 = 7,632.$$

இதில் விநோதம் என்னவெனில், இங்குள்ள ஒன்பது இலக்கங்களும் வெவ்வேறானவை.

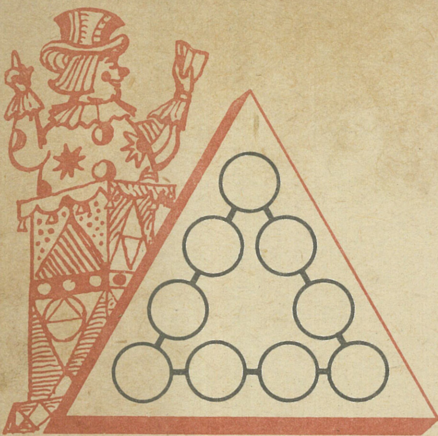
இம்மாதிரியான பெருக்கலுக்கு வேறு சில உதாரணங்கள் தர முடியுமா? வேறு உதாரணங்கள் உண்டா? உண்டெனில் எத்தனை?

47. எண்களாலான முக்கோணம்.—

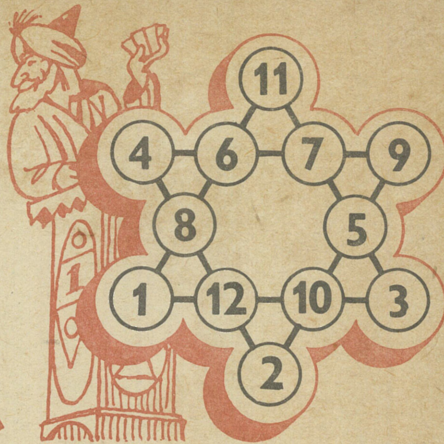
படம் 27ல் காட்டப்படும் முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் கூட்டுத் தொகை 20 வரும்படி வட்டங்களில் வெவ்வேறான ஒன்பது இலக்கங்களை எழுதுங்கள்.

48. எண்களாலான மற்றொரு முக்கோணம்.—

படம் 27ல் காட்டப்படும் முக்கோணத்தில் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் கூட்டுத் தொகை 17 வரும்படி முக்கோணத்தின் வட்டங்களில் வெவ்வேறான ஒன்பது இலக்கங்களை எழுதுங்கள்.



படம் 27. வட்டங்களில் இலக்கங்கள் எழுதவும்.



படம் 28. மாய நட்சத்திரம்.

49. மாய நட்சத்திரம்.—

படம் 28ல் காட்டப்படும் ஆறு முனை நட்சத்திரம் மாய நட்சத்திரமாகும்—ஏனெனில் ஒவ்வொரு வரிசையிலும் ஒரே கூட்டுத் தொகை கிடைக்கிறது:

$$4+6+7+9=26 \qquad 11+6+8+1=26$$
$$4+8+12+2=26 \qquad 11+7+5+3=26$$
$$9+5+10+2=26 \qquad 1+12+10+3=26.$$

ஆனால் ஆறு முனைகளின் கூட்டுத் தொகை வேறாகும்:

$$4+11+9+3+2+1=30.$$

ஒவ்வொரு வரிசையின் கூட்டுத் தொகை மட்டுமின்றி, ஆறு முனைகளின் கூட்டுத் தொகையும் 26 ஆகும்படி வட்டங்களில் எண்களை அமைத்து இந்த நட்சத்திரத்தைக் குறையற்றதாக்க முடியுமா?

பதில்கள் 38-49

38. வித்தைக்காரர் தரும் மூன்று கணக்குகளும் தீர்வு இல்லாதவை. ஆகவே இவற்றுக்குத் தீர்வு காண்போருக்கு எவ்வளவு வேண்டுமாயினும் பரிசுப் பணம் தருவதாய் வித்தைக்

காரரும் நானும் வக்குறுதி செய்யலாம். இயற்கணிதத்தைக் கையாண்டு இம்மூன்று கணக்குகளையும் ஆராய்ந்தால் இதை நிரூபித்துக் காட்டலாம்.

5 ரூபிள் கொடுத்தல். இப்படிக் கொடுக்க முடியும் என்பதாய் வைத்துக் கொள்வோம். இதற்கு 50-கோப்பெக் காசுகள் xஉம், 20-கோப்பெக் காசுகள் yஉம், 5-கோப்பெக் காசுகள் zஉம் கொடுக்க வேண்டியிருப்பதாய்க் கொள்வோம். பின்வரும் சமன்பாடு கிடைக்கிறது:

$$50x + 20y + 5z = 500 \text{ (அல்லது 5 ரூபிள்).}$$

இரு பக்கங்களுக்கும் பொதுவான காரணியாய் இருக்கும் 5ஐ விலக்குவோமாயின்,

$$10x + 4y + z = 100.$$

கொடுக்கப்பட்ட காசுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை 20 என்பது தெரியுமாதலால், பின்வரும் இரண்டாவது சமன்பாடு கிடைக்கிறது:

$$x + y + z = 20.$$

முதலாவது சமன்பாட்டிலிருந்து இரண்டாவதைக் கழித்தால், நமக்குக் கிடைப்பது:

$$9x + 3y = 80.$$

3ஆல் இரு பக்கங்களையும் வகுத்தோமானால்,

$$3x + y = 26\frac{2}{3}.$$

$3x$ என்பது 50-கோப்பெக் காசுகளின் எண்ணிக்கையை 3ஆல் பெருக்கி வரும் தொகை, இது முழு எண் என்பது தெளிவு. அதே போல் 20-கோப்பெக் காசுகளின் எண்ணிக்கையாகிய yஉம் முழு எண்தான். இந்த இரண்டு முழு எண்களின் கூட்டுத் தொகை பின்ன எண்ணாய் இருக்க முடியாது. ஆகவே இந்தக் கணக்குக்குத் தீர்வு இருப்பதாய்க் கொள்வது அபத்தமாகும். தீர்வு இல்லாதது இது.

குறைவாய்க் கொடுத்தல். ''குறைவாய்க் கொடுங்கள், போதும்'' என்று சொல்லி வித்தைக்காரர் தரும் கணக்குகளும் தீர்வு இல்லாதவையே என்பதாய் நிரூபித்துக் காட்ட

லாம். 3 ரூபிள் கொடுக்க வேண்டியிருக்கையில் நமக்குக் கிடைக்கும் சமன்பாடு:

$$3x + y = 13\frac{1}{3}.$$

2 ரூபிள் கொடுக்க வேண்டியிருக்கும் போது கிடைப்பது:

$$3x + y = 6\frac{2}{3}.$$

கூட்டுத் தொகை இரண்டிலும் பின்ன எண்களாகவே இருக்கின்றன.

ஆகவே இந்தக் கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண்போருக்கு பெருந் தொகையைப் பரிசளிப்பதாய் வித்தைக்காரர் அச்சமின்றி வாக்குறுதி செய்யலாம். அவர் இந்தப் பரிசுத் தொகையை யாருக்கும் தரும்படி நேரவே நேராது.

20 காசுகளைக் கொண்டு 5 அல்லது 3 அல்லது 2 ரூபிளுக்குப் பதில், உதாரணமாய் 4 ரூபிள் தரும்படிக் கேட்கப்பட்டால் நிலைமை மாறிவிடும். அப்போது கணக்குக்குத் தீர்வு காண்பது சாத்தியமாகிவிடும், அதுவும் வெவ்வேறான ஏழு தீர்வுகளைக் காண முடியும்.*

39. $888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1{,}000$. இதற்குப் பிற தீர்வுகளும் உண்டு.

40. இரண்டு தீர்வுகள் வருமாறு:

$$22 + 2 = 24; \quad 3^3 - 3 = 24.$$

41. மூன்று தீர்வுகள் கூறலாம்:

$$6 \times 6 - 6 = 30; \quad 3^3 + 3 = 30; \quad 33 - 3 = 30.$$

42. தெரியாத இலக்கங்களைப் பின்வருமாறு படிப்படியாய்க் கண்டுபிடித்துச் செல்லலாம்.

வசதிக்காக வேண்டி ஒவ்வொரு வரியையும் எண்ணிட்டுக் குறித்துக் கொள்வோம்:

---

* சாத்தியமான தீர்வுகளில் ஒன்றை மட்டும் குறிப்பிடுகிறோம்: ஆறு 50-கோப்பெக் காசுகள், இரண்டு 20-கோப்பெக் காசுகள், பன்னிரண்டு 5-கோப்பெக் காசுகள்.

1	. . . . ஒன்று
× 3*2	. . . . இரண்டு
3	. . . . மூன்று
3*2*	. . . . நான்கு
*2*5	. . . . ஐந்து
1*8*30	. . . . ஆறு

வரி மூன்றில் கடைசி இலக்கம் 0 ஆகவே இருக்குமென்பதை எளிதில் ஊகிக்கலாம், வரி ஆறில் கடைசி இலக்கம் 0ஆக இருப்பதிலிருந்து இது தெளிவாகிறது.

அடுத்து, வரி ஒன்றில் கடைசி இலக்கம் என்னவாய் இருக்க வேண்டுமென்பதை நிர்ணயிக்கிறோம்: 2ஆல் பெருக்கப்படும் போது முடிவில் 0ஐயும், 3ஆல் பெருக்கப்படும் போது முடிவில் வரி ஐந்தின் இறுதி இலக்கமான 5ஐயும் கொண்ட பெருக்குத் தொகைகளை தரும் இலக்கமாய் இது இருக்க வேண்டும். 5 ஒன்று மட்டுமே இப்படிப்பட்ட இலக்கமாய் இருக்க முடியும்.

வரி இரண்டில் தெரியாத இலக்கமாய் இருப்பது என்னவென்று கண்டுபிடிப்பது கடினமல்ல. இந்த இலக்கம் 8ஆகவே இருக்க வேண்டும், ஏனெனில் 8 மட்டும்தான் 15ஆல் பெருக்கப்படும் போது 20 என்பதாய் (வரி நான்கு) முடிவுறும் இலக்கத்தைத் தருவது.

முடிவில், வரி ஒன்றில் தெரியாத முதலாவது இலக்கமாய் அமைவது 4தான் என்பது புலப்படுகிறது, எப்படியெனில் 4 ஒன்று மட்டும்தான் 8ஆல் பெருக்கப்படும் போது 3ஐ (வரி நான்கு) துவக்க இலக்கமாய்க் கொண்ட எண்ணைத் தர வல்லது.

இனி ஏனைய வரிகளிலுள்ள தெரியாத இலக்கங்களை எளிதில் கண்டறிந்து கொண்டு விடலாம்; நமக்கு முழுமையாய்த் தெரிந்துவிட்ட வரி ஒன்றையும் வரி இரண்டையும் பெருக்கினால் போதும்.

நமக்கும் கிடைக்கும் பெருக்கல் வருமாறு:

$$\begin{array}{r} 415 \\ \times\ 382 \\ \hline 830 \\ 3320 \\ 1245 \\ \hline 158530 \end{array}$$

43. முந்தியக் கணக்கின் முறையை இதற்கும் கையாளலாம். நமக்குக் கிடைப்பது:

$$
\begin{array}{r}
325 \\
\times\ 147 \\
\hline
2275 \\
1300 \\
325 \\
\hline
47775
\end{array}
$$

44. தெரியாத இலக்கங்களைக் கண்டறிந்து குறித்தபின் நமக்குக் கிடைக்கும் வகுத்தல் வருமாறு:

$$
\begin{array}{rl}
325) & 52650\ (162 \\
- & 325 \\
\hline
 & 2015 \\
- & 1950 \\
\hline
 & 650 \\
- & 650 \\
\hline
\end{array}
$$

45 இந்தக் கணக்குக்கு விடை காண, குறிப்பிட்ட ஓர் எண் 11ஆல் வகுபடக் கூடியதா, இல்லையா என்பது பற்றிய விதி தெரிந்திருக்க வேண்டும். ஒரு எண்ணின் வலது கோடியிலிருந்து ஆரம்பித்து ஒற்றைப் படை வரிசையிலுள்ள இலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கும் இரட்டைப் படை வரிசையிலுள்ள இலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கும் இருக்கும் வித்தியாசம் 11ஆல் வகுபடுவதாகவோ, 0 ஆகவோ இருக்குமாயின், அந்த எண் 11ஆல் வகுபடும் எண்ணுகும்.

உதாரணமாய், 23,658,904 என்ற எண்ணை இந்த விதியின்படி சோதித்துப் பார்ப்போம்.

இரட்டைப் படை வரிசையிலுள்ள இலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை:

$$3+5+9+4=21.$$

ஒற்றைப் படை வரிசையிலுள்ள இலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை:

$$2+6+8+0=16.$$

இரண்டு கூட்டுத் தொகைகளின் வித்தியாசம் (பெரியதிலிருந்து சிறியதைக் கழிக்கிறோம்): $21-16=5$. இது 11

ஆல் வகுபடுவதல்ல. ஆகவே நாம் எடுத்துக் கொண்ட எண் 11ஆல் வகுபடும் எண்ணல்ல.

இன்னொரு எண்ணை—உதாரணமாய், 73,44,535ஐ இதே முறையில் சோதித்துப் பார்ப்போம்:

$$3 + 4 + 3 = 10$$
$$7 + 4 + 5 + 5 = 21$$
$$21 - 10 = 11.$$

இந்த வித்தியாசம் 11ஆல் வகுபடுவதால், எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட எண்ணும் 11ஆல் வகுபடுவதே ஆகும்.

வெவ்வேறான ஒன்பது இலக்கங்களையும் எந்த வரிசையில் அமைத்தால் கிடைக்கும் எண் 11ஆல் வகுபடுவதாய் இருக்கும் என்பதை ஊகிப்பது இனி கடினமல்ல.

இதோ ஓர் உதாரணம்:

35,2049,786.

சரிபார்ப்போம்:

$$3 + 2 + 4 + 7 + 6 = 22,$$
$$5 + 0 + 9 + 8 = 22.$$

வித்தியாசம்$= 22 - 22 = 0$. ஆகவே நாம் எடுத்துக் கொண்ட எண் 11ஆல் வகுபடும் எண்தான்.

இம்மாதிரியான எண்களில் மிகப் பெரியது:

98,76,52,413.

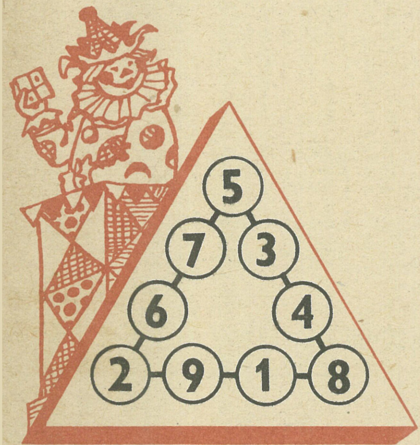
மிகச் சிறியது:

10,23,47,586.

46. பொறுமை வாய்ந்த வாசகர் இம்மாதிரியான பெருக்கல்களுக்கு ஒன்பது உதாரணங்களைத் தேடிக் கண்டுபிடிக்கலாம். அவையாவன:

$$12 \times 483 = 5{,}796$$
$$42 \times 138 = 5{,}796$$
$$18 \times 297 = 5{,}346$$
$$27 \times 198 = 5{,}346$$
$$39 \times 186 = 7{,}254$$
$$48 \times 159 = 7{,}632$$
$$28 \times 157 = 4{,}396$$
$$4 \times 1{,}738 = 6{,}952$$
$$4 \times 1{,}963 = 7{,}852$$

47, 48. தீர்வுகள் படங்கள் 29, 30ல் காட்டப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு வரிசையிலும் நடுவிலுள்ள இரு இலக்கங்களையும் ஒன்றின் இடத்தில் மற்றொன்று வரும்படி மாற்றியமைத்து பிற தீர்வுகளைப் பெறலாம்.



படம் 29.

படம் 30.

49. எண்களை எப்படி அமைத்திட வேண்டும் என்பதை அறிவதற்குப் பின்வருமாறு வாதாடிச் செல்ல வேண்டும்.

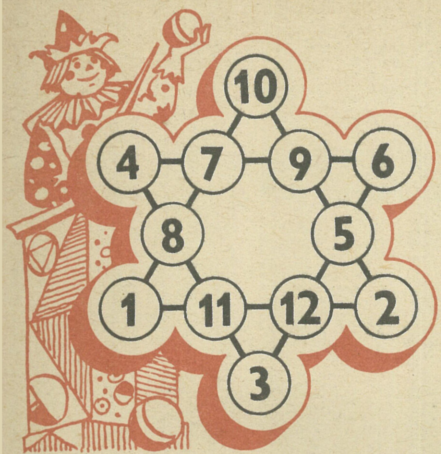
நட்சத்திரத்தின் முனைகளிலுள்ள எண்களின் கூட்டுத் தொகை 26. நட்சத்திரத்திலுள்ள எல்லா எண்களின் கூட்டுத் தொகை 78. ஆகவே உள்ளமைந்த அறுகோணத்திலுள்ள எண்களின் கூட்டுத் தொகை $78 - 26 = 52$ ஆகும்.

இனி, பெரிய முக்கோணங்களில் ஒன்றைப் பரிசீலிக்கலாம். இதன் ஒவ்வொரு பக்கத்தின் எண்களது கூட்டுத் தொகை 26. மூன்று பக்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளையும் கூட்டுவோமாயின் நமக்குக் கிடைப்பது $26 \times 3 = 78$. ஆனால் முனைகளிலுள்ள எண் ஒவ்வொன்றும் இப்போது இரண்டு தரம் கூட்டப்பட்டு விடுகிறது. உள்ளமைந்த மூன்று ஜோடி எண்களின் (அதாவது உள்ளமைந்த அறுகோணத்தினுடைய எண்களின்) கூட்டுத் தொகை 52 என்பது ஏற்கெனவே நமக்குத் தெரியும். ஆகவே ஒவ்வொரு முக்கோணத்தின் முனைகளிலுமுள்ள எண்களின் இரட்டிப்புக் கூட்டுத் தொகை

$78 - 52 = 26$ ஆகும். அதாவது ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் முனை எண்களது கூட்டுத் தொகை $26 \div 2 = 13$ ஆகும்.

இப்போது நமது பிரச்சினை குறுகிவிடுகிறது. நட்சத்திர முனைகளில் 12 அல்லது 11 வர முடியாது என்பது விளங்குகிறது. 10 வர முடியுமா என்று பார்க்கையில் முக்கோணத்தின் ஏனைய இரு முனைகளுக்கும் உரிய எண்கள் 1உம் 2உம் ஆகுமென்பது உடனே தெரிகிறது.

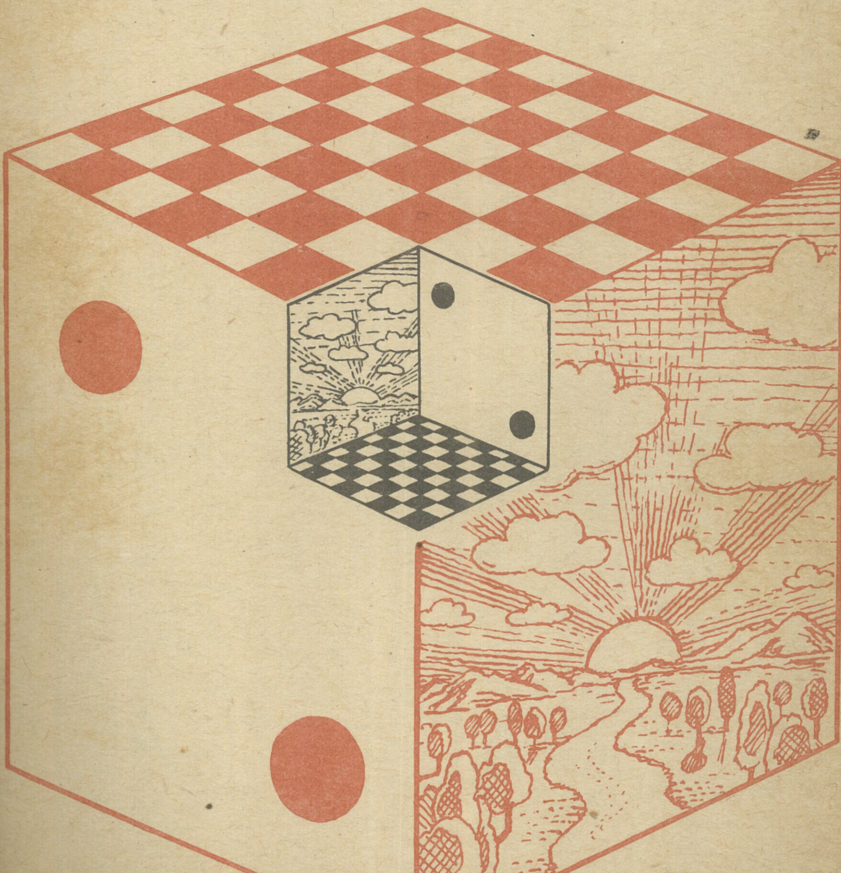
இதே முறையில் தொடர்ந்து செல்வோமாயின், நமக்கு வேண்டிய அமைப்பைக் கண்டுபிடித்து விடலாம். இது படம் 31ல் காட்டப்படுகிறது.



படம் 31.

6

அசுர எண்கள்




26315758404576
530652778
46827315394001

50. இலாபகரமான ஒப்பந்தம்.—

இது எப்போது நடைபெற்றது, எங்கே நடைபெற்றது என்று நமக்குத் தெரியாது. இது நடைபெருத ஒன்ருகவே இருக்கலாம். நடைபெருதது என்று கொள்வதே பொருத்த மானதாகவுங்கூட இருக்கலாம். ஆனால் உண்மையில் நடந்த தாயினும் சரி, வெறுங் கற்பனையாயினும் சரி, கதை மிகவும் சுவையானது, கேட்டு (அல்லது படித்துத்) தெரிந்து கொள்ள வேண்டியது.

1

கோடீஸ்வரர் ஒருவர் மட்டற்ற மகிழ்ச்சி கொண்ட வராய் வீட்டுக்குத் திரும்பி வந்தார். தாம் ஓர் ஆளைச் சந்தித் ததாகவும் இந்தச் சந்திப்பு தமக்குப் பெரிய அளவில் இலாபமளிக்கக் கூடியதாய் இருப்பதாகவும் கூறினர் அவர்.

''எப்படிப்பட்ட அதிர்ஷ்டம் தெரியுமா?'' என்ருர் அவர் தமது குடும்பத்தாரிடம். ''அதிர்ஷ்டம் செல்வந்தர்களையே தேடி வருமென்று சொல்கிருர்களே, அது மெய்தான் போலும். எப்படியும் என்னை அது தேடி வந்திருக்கிறது. எதிர்பாராத விதத்தில் யாவும் நடந்தேறின. வீட்டுக்குத் திரும்புகையில் நான் ஓர் ஆளைச் சந்தித்தேன். எவ்வகையிலும் குறிப்பிடத் தக்கவரல்ல அவர், நான் அவரைக் கண்ணெடுத்துப் பார்க் காமலே வந்திருப்பேன். ஆனால் நான் செல்வந்தன் என்பது தெரிந்ததும் அவர் என்னை அணுகி ஓர் ஆலோசனையை முன்வைத்தார், அவர் கூறிய அந்த ஆலோசனை என்னைப் பிரமிக்கச் செய்துவிட்டது.''

''நாம் ஓர் ஒப்பந்தம் செய்து கொள்ளலாம்'' என்ருர் அவர். ''சரியாய் ஒரு மாதத்துக்குத் தினமும் நான் உங் களுக்கு 1,00,000 ரூபிள் கொண்டு வந்து தருகிறேன். பதி லுக்கு நீங்களும் எனக்குத் தர வேண்டும், ஆனால் உங்களிட மிருந்து நான் அதிகமாய் ஒன்றும் கேட்கவில்லை.'' அவர் கேட்டது நம்பவே முடியாதபடி அவ்வளவு அற்பமாய் இருந்தது — முதல் நாளன்று ஒரேயொரு கோப்பெக் கொடுங்கள் போதும் என்ருர் அவர். என் காதுகள் என்னை ஏமாற்றுவதாய் நினைத்தேன் நான்.''

''ஒரேயொரு கோப்பெக்தானு?'' என்று கேட்டேன்.

''ஒன்றே ஒன்றுதான்'' என்று சந்தேகத்துக்கு இடமின்றி அழுத்தம் திருத்தமாய்க் கூறினர் அவர். ''இரண்டாம் நாள் நான் கொண்டு வந்து தரும் 1,00,000 ரூபிளுக்கு எனக்கு நீங்கள் 2 கோப்பெக் கொடுக்க வேண்டும்'' என்ருர்.

''அப்புறம்?'' என்று ஆவலோடு கேட்டேன். ''அப்புறம் என்ன செய்ய வேண்டும்?''

''எனது மூன்ருவது 1,00,000 ரூபிளுக்கு நீங்கள் எனக்கு 4 கோப்பெக் கொடுக்க வேண்டும்; நான்காவதற்கு 8 கோப்பெக்கும், ஐந்தாவதற்கு 16 கோப்பெக்கும் கொடுக்க வேண்டும். அதாவது ஒவ்வொரு நாளும் அதற்கு முந்திய நாள் தந்ததைப் போல் இரு மடங்கு தர வேண்டும் நீங்கள்.''

''அப்புறம் என்ன?''

''அப்புறம் என்ன? ஒன்றுமில்லை, அவ்வளவுதான். நான் கூறியதற்கு மேல் அதிகம் தரும்படி கேட்கமாட்டேன். ஆனல் நீங்கள் இந்த ஒப்பந்தத்திலிருந்து பிறழக் கூடாது. நாள்தோறும் உங்களுக்கு நான் 1,00,000 ரூபிள் கொண்டு வந்து தருவேன், நாள்தோறும் நீங்கள் ஒப்புக் கொண்ட தொகையை எனக்குத் தர வேண்டும். ஒரேயொரு நிபந்தனை என்னவெனில் ஒரு மாதம் முடிவுறும் வரை ஒப்பந்தப்படி தொடர்ந்து நீங்கள் உங்கள் வாக்கை நிறைவேற்ற வேண்டும்.''

படம் 32. ''ஒரேயொரு கோப்பெக்...''

என்னென்பது இதை! ஒரு சில கோப்பெக்குக்காக இந்த ஆள் நூருயிரக் கணக்கான ரூபிளைத்தருவதாய்ச்சொல்கிருர். மோசடிக்காரனுய் இருக்கவேண்டும், இல்லையேல் பைத்தியக் காரனுய் இருக்க வேண்டும். எப்படி இருப்பினும் எனக்கு இந்த ஒப்பந்தம் இலாபகரமானது, இதை நான் நழுவ விட்டுவிடக் கூடாது.

''சரி, அப்படியே ஒப்பந்தம் செய்து கொள்வோம்'' என்று அந்த ஆளிடம் சொன்னேன்.

"நீர் உமது பணத்தைக் கொண்டுவந்து கொடு, நீர் கேட்கும் தொகையை நான் தருகிறேன். ஆனால் என்னை நீர் ஏமாற்றக் கூடாது, கள்ள நோட்டுகளைக் கொண்டுவந்து தராதீர்."

"அம்மாதிரியான கவலை எதுவும் உங்களுக்கு வேண்டாம்" என்று பதிலளித்தார் அவர். "நாளைக்குக் காலையில் என்னை எதிர்பாருங்கள்" என்று கூறிச் சென்றார்.

"ஆள் வராமற் போய்விடுவாரோ என்று பயப்படுகிறேன். எவ்வளவு அசட்டுத்தனமான காரியம் செய்கிறோம் என்று புரிந்து கொண்டு விடுவாரோ என்று அஞ்சுகிறேன். சரி, நாளை ஒன்றும் தொலைவில் இல்லை, காத்திருந்து பார்க்கலாம்."

2

மறுநாள் அதிகாலையில் சன்னலில் யாரோ தட்டும் சப்தம் கேட்டது. அந்த ஆள்தான் வந்திருந்தார்.

"நான் வாக்களித்தபடி பணம் கொண்டு வந்திருக்கிறேன். தயாராய் ஒரு கோப்பெக் எடுத்து வைத்திருக்கிறீர்களா?" என்று கேட்டார் அவர்.

ஆள் உள்ளே நுழைந்ததும் ஒரு கட்டு நோட்டுகளைப் பைக்குள்ளிருந்து எடுத்து 1,00,000 ரூபிளை எண்ணிக் கொடுத்தார்—எல்லாம் நல்ல நோட்டுகள்.

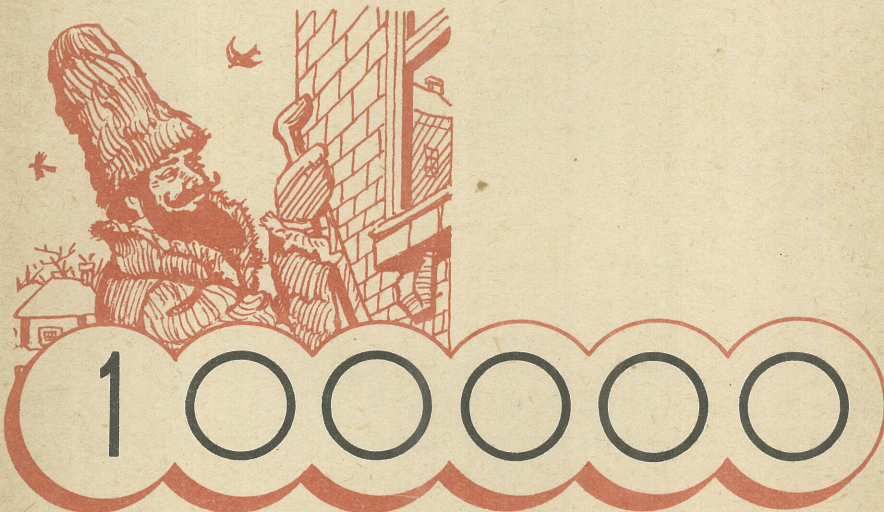
"ஒப்பந்தப்படி நான் தர வேண்டிய பணம் இதோ இருக்கிறது. நீங்கள் எனக்குக் கொடுக்க வேண்டிய கோப்பெக்கை எடுங்கள்" என்றார்.

கோடீஸ்வரர் ஒரு செப்புக்காசை எடுத்து மேஜைமீது வைத்தார், அவருடைய நெஞ்சு படபடத்துக் கொண்டது, வந்த ஆள் நிலைமையைப் புரிந்து கொண்டு தனது பணத்தைத் திருப்பித் தரும்படிக் கேட்பாரோ என்று அவருக்குப் பயமாயிருந்தது. ஆனால் வந்தவர் அந்தச் செப்புக் காசை எடுத்துக் கையில் வைத்து எடையை நிதானித்துப் பார்த்து விட்டு தன் பைக்குள் போட்டுக் கொண்டார்.

"நாளைக்கும் இதே நேரத்துக்கு வருவேன். இரண்டு கோப்பெக்குகளைத் தயாராய் நீங்கள் எடுத்து வைத்திருக்க வேண்டும், மறந்துவிடாதீர்கள்."

செல்வந்தரால் தமக்கு கிட்டியிருக்கும் அதிர்ஷ்டம் மெய்யானதுதானா என்று நம்ப முடியவில்லை. விண்ணிலிருந்து

வந்து விழுந்த மாதிரி 1,00,000 ரூபிள் அல்லவா கிடைத்திருக்கிறது! நோட்டுகளை எண்ணிக் கணக்கிட்டுப் பார்த்தார், சரியாகத்தான் இருந்தது. எதுவும் கள்ள நோட்டல்ல. பிறகு பணத்தை எடுத்துப் பத்திரமாய் உள்ளே வைத்தார். மறுநாளும் இதே போல பணம் கிடைக்கும் என்று நினைத்து ஆனந்தப்பட்டுக் கொண்டார்.



படம் 33. மறுநாள் அதிகாலையில்...

ஆனால் இரவில் செல்வந்தருக்குத் தூக்கம் வரவில்லை. இந்த ஆள் மாறு வேடம் பூண்ட கொள்ளைக்காரனாய் இருப்பானோ, கோடீஸ்வரனாகிய தான் தனது செல்வத்தை வைத்திருக்கும் இடத்தை தெரிந்து கொண்டு பிற்பாடு கொள்ளையடிப்பதற்காக வந்தவனாய் இருப்பானோ?

செல்வந்தர் படுக்கையை விட்டெழுந்து கதவுகளை முன்னிலும் நன்றாய்த் தாளிட்டார், சன்னலருகே சென்று பல தரம் வெளியே பார்த்துவிட்டு வந்து படுத்துக் கொண்டார். சிறு சப்தம் கேட்டதும் திடுக்கிட்டுக் குதித்தெழுந்தார். தூங்க முடியாமல் நெடுநேரம் கண் விழித்திருந்தார். பொழுது விடிந்ததும் சன்னல் தட்டப்பட்டது. மீண்டும் அந்த ஆள் உள்ளே வந்தார் 1,00,000ரூபிளை எண்ணிக் கொடுத்து

விட்டுத் தனக்கு வர வேண்டிய இரண்டு கோப்பெக்குகளை வாங்கி பைக்குள் போட்டுக் கொண்டு புறப்பட்டார்.

''நாளைக்கு நீங்கள் நான்கு கோப்பெக்குகளை எடுத்து வைத்திருக்க வேண்டும்'' என்று சொல்லிவிட்டுப் போய்ச் சேர்ந்தார்.

கோடீஸ்வரர் அளவிலா ஆனந்தமடைந்தார்—பணப் பெட்டியினுள் பத்திரப் படுத்தி வைப்பதற்கு இன்னொரு 1,00,000 ரூபிள் கிடைத்திருக்கிறது! வந்த ஆள் கொள்ளைக் காரனைப் போன்றவனுய் இருக்கவில்லை, சந்தேகத்துக்குரிய ஆளாய்த் தோன்றவில்லை. பைத்திய மனிதர்! அவர் விரும்பியது எல்லாம் சொற்பக் காசுகள்தான், செப்புக் கோப்பெக்குகள்தான்! இம்மாதிரியான ஆட்கள் இவ்வுலகில் இன்னும் கொஞ்சம் அதிகம் பேர் இருந்தார்களானுல், கெட்டிக்காரர்கள் பாடு கொண்டாட்டம்தான்....

மூன்ரும் நாளன்றும் விடியற் காலையில் அவர் வந்தார், கோடீஸ்வரருக்கு மூன்ருவது 1,00,000 ரூபிள் கிடைத்தது. இம்முறை கோடீஸ்வரர் 4 கோப்பெக் கொடுத்தார்.

இன்னொரு நாள், இன்னொரு 1,00,000 ரூபிள்—8 கோப்பெக் செல்வாயிற்று.

ஐந்தாவது 1,00,000 ரூபிளுக்குச் செல்வந்தர் 16 கோப்பெக் கொடுத்தார். ஆருவதுக்கு 32 கோப்பெக்.

முதல் ஏழு நாட்களில் கோடீஸ்வரன் பெற்றுக் கொண்டது 7,00,000 ரூபிள், கொடுத்தது சொற்பக் காசுகள்:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 1 \text{ ரூபிள் } 27 \text{ கோப்பெக்.}$$

பேராசை பிடித்த செல்வந்தருக்கு இந்தப் பரிவர்த்தனை பேரானந்தம் அளித்து வந்தது. இந்த ஒப்பந்தம் ஒரேயொரு மாதத்துக்குத்தான் நீடிக்கும் என்று நினைத்த போதுதான் அவருக்கு வருத்தமாய் இருந்தது. மொத்தம் 30,00,000 ரூபிள்தான் அவருக்குக் கிடைக்கும். ஒப்பந்தத்தை ஒரு மாதத்துக்குப் பிற்பாடும் நீடிக்கச் செய்வதற்கு இந்த ஆள் உடன்படுவாரா என்று பேசிப் பார்த்தால் என்ன? வேண்டாம், அது ஆபத்தானது. பணத்தை விரையமாக்குகிறோம் என்பதை இவர் உணர்ந்து கொண்டுவிடக் கூடும்.

நாள் தவருமல் அந்த ஆள் அதிகாலையில் வந்து 1,00,000 ரூபிளைக் கொடுத்துச் சென்ருர். எட்டாம் நாள் அவர் பெற்றுக் கொண்டது 1 ரூபிள் 28 கோப்பெக், ஒன்பதாம்

நாளன்று—2.56, பத்தாம் நாளன்று—5.12, பதினொன்றும் நாளன்று—10.24, பன்னிரண்டாம் நாளன்று—20.48, பதின் மூன்றும் நாளன்று—40.96, பதினான்காம் நாளன்று—81.92.

செல்வந்தர் மகிழ்ச்சியுடன் கொடுத்துவந்தார். ஏற்கென வே அவனுக்கு 14,00,000 ரூபிள் கிடைத்துவிட்டது, ஆனால் அவர் செலவிட்டது சுமார் 150 ரூபிள்தான்.

ஆனால் அவரது மகிழ்ச்சி அதிக நாட்களுக்கு நீடிக்க வில்லை. ஆரம்பத்தில் தோன்றியதைப் போல் இந்த ஒப்பந் தம் அவ்வளவு இலாபகரமானதல்ல என்பதை விரைவிலே அவர் காணலானார். பதினைந்து நாட்களுக்கு எல்லாம் அவர் கோப்பெக்கில் அல்ல, நூற்றுக் கணக்கான ரூபிள்களில் பணம் தர வேண்டியிருந்தது. அவர் தந்த தொகைகள் அதிவேக மாய் அதிகரித்துச் சென்றன. அவை வருமாறு:

பதினைந்தாவது	1,00,000	ரூபிளுக்கு	. 163.84
பதினாறாவது	1,00,000	ரூபிளுக்கு	. 327.68
பதினேழாவது	1,00,000	ரூபிளுக்கு	. 655.36
பதினெட்டாவது	1,00,000	ரூபிளுக்கு	. 1,310.72
பத்தொன்பதாவது	1,00,000	ரூபிளுக்கு	. 2,621.44

பரிவர்த்தனை இன்னமும் அவருக்கு நட்டம் உண்டாக்க வில்லை, அவர் 5,000 ரூபிளுக்கும் அதிகமாய்க் கொடுத்து விட்டது மெய்தான். எனினும், இதற்குப் பதில் அவருக்கு 18,00,000 ரூபிள் அல்லவா கிடைத்திருக்கிறது?

ஆயினும் இந்த இலாபம் நாளுக்கு நாள் குன்றிச் சென் றது—அதிவேகமாய்க் குன்றிச் சென்றது.

இதன்பின் அவர் கொடுத்த தொகைகள் வருமாறு:

இருபதாவது	1,00,000	ரூபிளுக்கு . . .	5,242.88
இருபத்தொன்றாவது	1,00,000	ரூபிளுக்கு . . .	10,485.76
இருபத்திரண்டாவது	1,00,000	ரூபிளுக்கு . . .	20,971.52
இருபத்திமூன்றாவது	1,00,000	ரூபிளுக்கு . . .	41,943.04
இருபத்திநான்காவது	1,00,000	ரூபிளுக்கு . . .	83,886.08
இருபத்தைந்தாவது	1,00,000	ரூபிளுக்கு . .	1,67,772.16
இருபத்தாறாவது	1,00,000	ரூபிளுக்கு . .	3,35,544.32
இருபத்தேழாவது	1,00,000	ரூபிளுக்கு . .	6,71,088.64

இப்போது அவர் பெற்றுக் கொண்டதைக் காட்டிலும் பன்மடங்கு அதிகமாய்க் கொடுக்க வேண்டியதாகியது. இத்துடன் பரிவர்த்தனையை நிறுத்திக் கொண்டுவிட விரும்பி னார் அவர். ஆனால் ஒப்பந்தத்தை மீற முடியுமா?

நிலைமை படுபயங்கரமாகிச் சென்றது. வந்த ஆள் பலே கைகாரர், தன்னைக் கொடிய முறையில் ஏமாற்றிவிட்டார், மொத்தம் தமக்குக் கிடைப்பதைக் காட்டிலும் மிகவும் அதிகமாய் தாம் கொடுத்தாக வேண்டும் என்பதை அவர் உணரலானார்.

28ஆவது நாளன்று செல்வந்தர் 10 லட்சம் ரூபிளுக்கும் அதிகமாய்க் கொடுக்க வேண்டியிருந்தது. கடைசி இரண்டு நாட்களில் அவர் கொடுத்த தொகைகள் அவரைப் போண்டி யாக்கிவிட்டன. அவை பிரம்மாண்டத் தொகைகள்:

இருபத்தெட்டாம்	1,00,000 ரூபிளுக்கு	13,42,177.28
இருபத்தொன்பதாம்	1,00,000 ரூபிளுக்கு	26,84,354.56
முப்பதாம்	1,00,000 ரூபிளுக்கு	53,68,709.12

அந்த ஆள் கடைசி தரம் வந்து சென்றதும் கோடீஸ்வரர் தாம் பெற்றுக் கொண்ட 30,00,000 ரூபிளுக்குத் தாம் கொடுத்த மொத்தத் தொகையைக் கணக்கிட்டுப் பார்த்தார். இந்த மொத்தத் தொகை

1,07,37,418 ரூபிள் 23 கோப்பெக்.

1 கோடி 10 லட்சம் ரூபிளுக்குச் சற்றுக் குறைவான தொகை! ஒரேயொரு கோப்பெக்கில் ஆரம்பித்தது இப்படி அசுரத் தொகையாகிவிட்டது! அந்த ஆள் நாள் ஒன்றுக்கு 3,00,000 ரூபிள் வீதம் கொடுத்திருந்தால் கூட அவருக்கு எந்த நட்டமும் இல்லை.

3

இந்தக் கதையை முடிக்குமுன் கோடீஸ்வரரின் நட்டத்தைக் கணக்கிட, அதாவது அவர் கொடுத்த தொகைகளைக் கூட்டி,

$1+2+4+8+16+32+64$ ...இப்படிச் செல்லும் கூட்டலுக்கு விடை காண ஒரு குறுக்கு வழியைக் கூறுகிறேன்.

மேற்கூறிய எண்களின் வரிசையில் பின்வரும் இயல்பு இருப்பதைக் கவனியுங்கள்:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1\\
2 &= 1+1\\
4 &= (1+2)+1\\
8 &= (1+2+4)+1\\
16 &= (1+2+4+8)+1\\
32 &= (1+2+4+8+16)+1 \ldots .
\end{aligned}
$$

ஒவ்வோர் எண்ணும் அதற்கு முந்திய எண்களின் கூட்டுத் தொகையை விட 1 கூடுதலான எண்ணுக்குச் சமம் என்பது தெரிகிறது. ஆகவே எல்லா எண்களையும் கூட்டுவதற்கு, உதாரணமாய் 1லிருந்து 32,768 வரையிலான வரிசையைக் கூட்டுவதற்கு, கடைசி எண்ணாகிய 32,768 உடன் அதற்கு முந்திய எல்லா எண்களின் கூட்டுத் தொகையைக் கூட்டினால் போதும், அதாவது 32,768 உடன் அதற்கு 1 குறைவான எண்ணைக் (32,768 — 1) கூட்டினால் போதும். நமக்குக் கிடைப்பது 65,535.

கோடீஸ்வரர் கடைசி தடவை கொடுத்த பணம் எவ்வளவு என்று கண்டுபிடிப்போமாயின், இந்த குறுக்கு வழி முறையைக் கையாண்டு, நாம் அவர் கொடுத்த மொத்த பணத்தைத் தெரிந்து கொண்டுவிடலாம். கடைசி தரம் அவர் கொடுத்த பணம் 53,68,709 ரூபிள் 12 கோப்பெக். ஆகவே 53,68,709.12ஐயும் 53,68,709.11ஐயும் கூட்டுகிறோம். இந்தக் கூட்டுத் தொகை 1,07,37,418.23. இதுவே கோடீஸ்வரர் செலவு செய்த மொத்த பணம்.

51. வதந்தி.—

வதந்தி பரவும் வேகம் மெய்யாகவே வியக்கத்தக்கது. சில சமயம் இரண்டொருவர் காண நேரும் ஒரு நிகழ்ச்சி அல்லது விபத்து குறித்து இரண்டு மணி நேரத்துக்குள் நகரெங்கும் பேச்சு அடிபடுகிறது. இந்த மட்டுமீறிய வேகம் வியக்கத்தக்கதாய் மட்டுமின்றி, திகைப்பூட்டுவதாயும் இருக்கிறது.

ஆயினும் எண்கணிதத்தின் துணை கொண்டு இந்த விவகாரத்தைப் பரிசீலிப்போமாயின் உண்மையில் இதில் அதிசயம் ஒன்றுமில்லை என்பது விளங்கும்.

பின்வரும் ஓர் உதாரணத்தைப் பரிசீலனை செய்வோம்.

1

தலைநகரில் வசிக்கும் ஒருவர் சுமார் 50,000 பேர் வாழும் ஒரு நகரத்துக்கு வந்து சுவையான ஒரு செய்தியைத் தெரிவிக்கிறார். அவர் வந்து தங்கும் வீட்டில் மூன்றே மூன்று பேரிடம் இந்தச் செய்தியைக் கூறுகிறார். இதற்கு 15 நிமிடம் ஆவதாய்க் கொள்வோம்.

படம் 34. சுவையான செய்தி...

இப்படி அச்செய்தி அவர் வந்து சேர்ந்தற்கு 15 நிமிடத்துக்கு எல்லாம்—காலை 8.15 மணிக்கெல்லாம் என்பதாய்க் கொள்வோம்—அவருக்கும் உள்ளூர்வாசிகள் மூன்று பேருக்குமாய் நான்கு பேருக்குத் தெரிகிறது.

உள்ளூர்வாசிகளாகிய இந்த மூன்று பேரில் ஒவ்வொருவரும் இதை வேறு மூன்று பேரிடம் கூறுகிறார். இதற்கு இன்னொரு 15 நிமிடம் ஆகிறது. அதாவது அரைமணி நேரத்துக்கெல்லாம் $4 + (3 \times 3) = 13$ பேருக்கு இச்செய்தி பரவிவிடுகிறது.

புதிதாய்ச் செய்தியைத் தெரிந்துகொள்ளும் இந்த ஒன்பது பேரில் ஒவ்வொருவரும் இதனை மூன்று நண்பர்களுக்குத் தெரிவிக்கிறார். காலை 8.45க்குள் இச்செய்தி $13 + (3 \times 9) = 40$ பேருக்குத் தெரிந்துவிடுகிறது.

வதந்தி தொடர்ந்து இதே முறையில் பரவுமாயின், அதாவது அதைக் கேட்போர் ஒவ்வொருவரும் அடுத்த 15 நிமிடத்துக்குள் அதைப் புதிதாய் மூன்று பேருக்குத் தெரிவிப்பாராயின், இதன் விளைவு பின்வருமாறு இருக்கும்:

காலை	9	மணிக்குள்	$40 + (3 \times 27) = 121$ பேர்
,,	9.15	,,	$121 + (3 \times 81) = 364$,,
,,	9.30	,,	$364 + (3 \times 243) = 1,093$,,

இவ்விதம் ஒன்றரை மணி நேரத்திற்குள் இச்செய்தி ஏறத்தாழ 1,100 பேருக்குத் தெரிந்துவிடுகிறது. 50,000 பேர் வாழும் ஒரு நகரத்துக்கு இது ஒரு பெரிய வேகம் என்பதற்கில்லை. நகரம் பூராவும் செய்தியைத் தெரிந்து கொள்ள நெடுநேரமாகிவிடும் என்பதாய்ச் சிலர் நினைக்கலாம். மேலும் தொடர்ந்து அது எவ்வளவு வேகத்தில் பரவும் என்று பார்ப்போம்:

காலை 9.45 மணிக்குள் $1{,}093 + (3 \times 729) = 3{,}280$ பேர்
காலை 10 ,, $3{,}280 + (3 \times 2{,}187) = 9{,}841$,,

படம் 35. ஒவ்வொருவரும் மூன்று புதிய ஆட்களுக்குச் செய்தியைச் சொல்கிறார்.

அடுத்த 15 நிமிடத்துக்குள் இந்நகரத்தின் மக்களில் பாதிக்கும் மேற்பட்டோருக்கு இந்தச் செய்தி தெரிந்துவிடும்:

$9{,}841 + (3 \times 6{,}561) = 29{,}524$ பேர்.

காலை 8 மணிக்கு ஒரேயொருவருக்கு மட்டும் தெரிந்திருந்த செய்தி இவ்விதம் காலை 10.30 மணிக்குள் அனைத்து நகரமும் அறிந்த செய்தியாகிவிடுகிறது.

2

இது எப்படிக் கணக்கிடப்படுகிறது என்று தெரிந்து கொள்ளலாம். முடிவில் யாவும் பின்வரும் எண்களது கூட்டலாகி விடக் காண்கிறோம்:

$$1 + 3 + (3 \times 3) + (3 \times 3 \times 3) + (3 \times 3 \times 3 \times 3) \ldots.$$

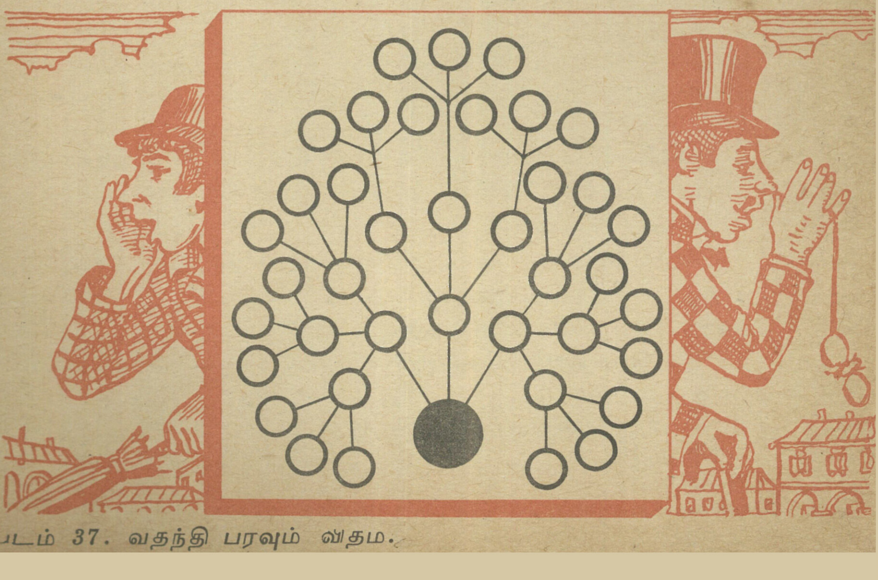
முன்பு $1 + 2 + 4 + 8 \ldots$ என்ற கூட்டலுக்குப் பயன்படுத்தியதைப் போன்ற சுருக்கு வழி இந்தக் கூட்டலுக்கும் இருக்கிறதா? இருக்கிறது, இதற்கு நாம் கூட்டப்படும் எண்களது பின்வரும் நூதன இயல்பைக் கவனித்துக் கணக்கில் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 &= 1 \times 2 + 1 \\ 9 &= (1 + 3) \times 2 + 1 \\ 27 &= (1 + 3 + 9) \times 2 + 1 \\ 81 &= (1 + 3 + 9 + 27) \times 2 + 1 \ldots. \end{aligned}$$

அதாவது, ஒவ்வோர் எண்ணும் அதற்கு முந்தியவற்றின் கூட்டுத் தொகையை இரண்டால் பெருக்கி அதனுடன் ஒன்றைக் கூட்டி வரும் தொகைக்குச் சமமாயிருக்கிறது.

படம் 36. காலை பத்தரை மணிக்கெல்லாம் நகரம் பூராவிலும் செய்தி தெரிந்து விடுகிறது.

ஆகவே நமது கூட்டலில் 1லிருந்து எந்த ஒரு எண் வரையிலும் இருக்கும் எல்லா எண்களின் கூட்டுத் தொகையைக் கணக்கிடுவதற்கு, இந்தக் கடைசி



படம் 37. வதந்தி பரவும் விதம்.

எண்ணுடன் அவ்வெண்ணில் 1ஐக் கழித்து வரும் மீதியில் சரிபாதியைக் கூட்டினுல் போதும். உதாரணமாய்,

$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729$ என்ற எண் தொடரின் கூட்டுத்தொகை$=729 + 728$ல் சரிபாதி$=729 + 364 = 1{,}093$.

3

நமது உதாரணத்தில் நகரவாசி ஒவ்வொருவரும் இச் செய்தியை புதிதாய் மூன்றே மூன்று பேருக்குத்தான் தெரிவிக்கிருர். இப்படியல்லாமல் இந்நகரவாசிகள் இன்னும் பெரிய வாயாடிகளாய் இருந்து, மூன்று பேருக்குப் பதில் ஐந்து பேருக்கு, அல்லது பத்து பேருக்குங்கூட தெரிவிப்பார்களாயின், வதந்தி மிக வேகமாய்ச் பரவிச் செல்லும். ஐந்து பேருக்குத் தெரிவிப்பதாய்க் கொள்வோமாஞல், நிலைமை பின்வருமாறு இருக்கும்:

காலை 8	மணிக்கு	. . . .	1 ஆள்
காலை 8.15	,,	. . . . 1 + 5	6 பேர்
காலை 8.30	,,	. . . . . 6 + (5 × 5)	31 ,,
காலை 8.45	,,	. . . . 31 + (25 × 5)	156 ,,
காலை 9	,,	. . . 156 + (125 × 5)	781 ,,
காலை 9.15	,,	. . . 781 + (625 × 5) . .	3,906 ,,
காலை 9.30	,,	. 3,906 + (3,125 × 5) . .	19,531 ,,

காலை 9.45 மணிக்கெல்லாம் இச்செய்தி இந்நகரத்தில் வாழும் 50,000 பேரில் ஒருவர் விடாமல் எல்லோருக்கும் தெரிந்ததாகிவிடும்.

செய்தியைக் கேட்கும் ஒவ்வொருவரும் புதிதாய்ப் பத்துப் பேருக்கு இதைத் தெரிவிப்பாராயின், இது இன்னும் பன்மடங்கு வேகமாய்ப் பரவும். இப்போது நமக்கு அதிவேகமாய்ப் பெரிதாகிச் செல்லும் பின்வரும் எண்கள் கிடைக்கும்:

காலை 8	மணிக்கு	. . . .	1 ஆள்
காலை 8.15	,,	. . . . 1 + 10	11 பேர்
காலை 8.30	,,	. . . . . . 11 + 100 . . .	111 ,,
காலை 8.45	,,	. . . . 111 + 1,000 . .	1,111 ,,
காலை 9	,,	. . . 1,111 + 10,000 . .	11,111 ,,

இதற்கு அடுத்த எண் 1,11,111 ஆகுமென்பது கூறாமலே விளங்கும். எனவே காலை 9 மணிக்குப் பிற்பாடு சிறிது நேரத்துக்குள் அனைத்து நகரத்துக்கும் செய்தி தெரிந்துவிடும் என்றாகிறது. இப்போது செய்தி ஒரு மணிக்குச் சற்றே அதிகமான நேரத்துக்குள் அனைத்து நகரத்துக்கும் பரவிவிடுகிறது.

52. மிதிவண்டி மோசடி.—

புரட்சிக்கு முற்பட்ட ருஷ்யாவில் சில கம்பெனிகள் சராசரித் தரமுள்ள தமது பண்டங்களை விற்பதற்குச் சாதுர்ய

மான ஒரு வழியைக் கையாளுவது வழக்கம். அதிகமாய் விற்பனையாகும் செய்தியேடுகளிலும் இதழ்களிலும் பக்கம் 117ல் உள்ளதைப் போன்ற விளம்பரங்கள் வெளியிடப்படும்.

இம்மாதிரியான அறிவிப்பைக் கண்டு மயங்கி நிபந்தனைகளை அனுப்புமாறு வேண்டியவர்கள் பலரும் உண்டு. உடனே அவர்களுக்கு விவரங்கள் யாவும் வந்து சேரும்.

10 ரூபிளுக்கு ஒருவருக்குக் கிடைத்தது மிதிவண்டியல்ல, நான்கு சீட்டுகளே கிடைத்தன. இந்த நான்கு சீட்டுகளையும் தமது நண்பர்களிடம் சீட்டுக்கு 10 ரூபிள் வீதம் விற்கும்படி அவர் கேட்டுக் கொள்ளப்பட்டார். இவ்விதம் விற்று அவர் சேகரிக்கும் 40 ரூபிளைக் கம்பெனியிடம் சேர்ப்பித்ததும் அவருக்கு மிதிவண்டி கிடைத்தது. ஆகவே அவர் கைவிட்டுச் செலுத்தியது 10 ரூபிள்தான். எஞ்சிய 40 ரூபிள் அவருடைய நண்பர்களிடமிருந்து வந்ததாகும். அவர் 10 ரூபிள் செலுத்தியதோடன்னியில் தமது 4 சீட்டுகளையும் வாங்கக் கூடியவர்களைத் தேடிக் கண்டுபிடிக்க வேண்டியிருந்தது என்பது மெய்தான். ஆனால் இதற்காக அவர் கைப்பணத்தை செலவிட வேண்டியதில்லை.

இந்தச் சீட்டுகளை எதற்காக வாங்கினார்கள்? 10 ரூபிள் கொடுத்து ஒரு சீட்டு வாங்கியவருக்குக் கிடைக்கும் ஆதாயம் என்ன? அவர் இந்த ஒரு சீட்டைப் பரிவர்த்தனை செய்து அதை யொத்த ஐந்து சீட்டுகளைப் பெற்றுக் கொள்ளும் உரிமையுடையவராகிறார். சீட்டுக்காக அவர் கொடுத்த 10 ரூபிள்தான் அவர் கையை விட்டுச் செலவு செய்த தொகை, இதற்குப் பதில் 50 ரூபிளை ஏனையோரிடமிருந்து சேகரித்து அதைக் கொண்டு மிதிவண்டி வாங்கிக் கொள்ளும் வாய்ப்பைப் பெறுகிறார். இவரிடமிருந்து சீட்டுகளை வாங்கிக் கொள்வோர் ஒவ்வொருவரும் இதே போல் ஏனையோரிடம் விற்பதற்காக ஐந்து சீட்டுகளைப் பெறுகின்றார். இம்மாதிரி தொடர்ந்து பலரும் சீட்டுகள் வாங்கிச் செல்கிறார்கள்.

இதில் மோசடி எதுவும் இல்லை என்பதாகவே எடுத்தயெடுப்பில் தோன்றுகிறது. விளம்பரம் செய்த கம்பெனி அதன் வாக்கை நிறைவேற்றுகிறது: மிதிவண்டியை வாங்குகிறவர் 10 ரூபிள்தான் செலவிடுகிறார். அதேபோது கம்பெனியும் பணத்தை இழக்கவில்லை—அதன் பண்டங்களுக்குரிய முழு விலையும் அதற்குக் கிடைக்கிறது.

ஆயினும் இது மோசடியே என்பதில் சந்தேகம் இல்லே. ஏனெனில் இந்த ''மலேச் சரிவு''—ருஷ்யாவில் இப்படித் தான் மக்கள் இதற்குப் பெயரிட்டிருந்தார்கள்—மிகப் பலரையும் பணம் இழக்கச் செய்தது. தாம் வாங்கிய சீட்டுகளே விற்க முடியாமற் போய் இவர்கள் இழப்புக்கு உள்ளாக வேண்டியதாயிற்று. பண்டத்தின் முழு விலேக்கும் குறை விலேக்குமுள்ள வித்தியாசத் தொகையைச் செலுத்தியவர்கள் இவர்களே. சீட்டுகளே வைத்திருப்போர் அவற்றை ஏனேயோருக்கு விற்க முடியாமற் போகும் ஒரு தருணம் முன்னதாகவோ பின்னதாகவோ வரவே செய்தது. சீட்டு வைத்திருப்போரின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு வேகமாய்ப் பெருகிச் செல்லும் என்பதை நீங்கள் காகிதமும் பென்சிலும் கொண்டு கணக்கிட்டுப் பார்த்தால், இப்படி ஒரு தருணம் நிச்சயம் வந்தே ஆக வேண்டுமென்பது விளங்கும்.

சீட்டுகளே வாங்கும் முதலாவது தொகுதியினர், நேரே கம்பெனியிடமிருந்து தமது சீட்டுகளேப் பெற்றுக் கொள்ளும் இவர்கள் சாதாரணமாய் அதிக சிரமமில்லாமலே இச்சீட்டுகளே வாங்கிக் கொள்ள கூடிய ஏனேய ஆட்களேத் தேடிப் பிடிக்க முடிகிறது. இந்தத் தொகுதியைச் சேர்ந்த ஒவ்வொருவரும் நான்கு புதிய ஆட்களே இந்த வாங்கல் விற்பனேயில் ஈடுபடும்படி இழுக்கிருர்.

இந்தப் புதிய ஆட்கள் தமது சீட்டுகளே ஏனேய 20 பேரிடம் (4×5) விற்க வேண்டியிருக்கிறது. சீட்டை வாங்கிஞல் ஆதாயம் உண்டென்று இத்தனே பேருக்கும் அவர்கள் நம்பிக்கை உண்டாக்கியாக வேண்டும். இதை அவர்கள் வெற்றிகரமாய்ச் செய்து புதிதாய் 20 ஆட்களே இழுத்து விடுவதாய் வைத்துக் கொள்வோம்.

மலேச் சரிவின் வேகம் அதிகரிக்கிறது. சீட்டு வாங்கிக் கொண்ட இந்த 20 புதிய ஆட்கள் இச்சீட்டுகளே ஏனேய $20 \times 5 = 100$ பேரிடம் விற்ருக வேண்டும்.

ஆரம்பத் தொகுதியினர் ஒவ்வொருவரும் இதுகாறும் மொத்தம் $1 + 4 + 20 + 100 = 125$ புதிய ஆட்களே இந்தக் கூத்தில் இழுத்துக் கொண்டு விட்டார். இவர்களில் 25 பேர் மிதிவண்டிகள் பெற்றுக்கொண்டார்கள், ஏனேய 100 பேருக்கு மிதிவண்டி பெறலாமென்ற ஒரு நம்பிக்கையே கிடைத்தது—இந்த நம்பிக்கைக்காக இவர்கள் ஒவ்வொருவரும் 10 ரூபிள் கொடுத்தார்.

மலைச் சரிவு இப்போது நண்பர்களது குறுகிய வட்டத்தை உடைத்துக் கொண்டு நகரெங்கும் பெருகிப் பரவிற்று. ஆனால் சீட்டு வாங்கக்கூடிய புதிய ஆட்களைத் தேடிப் பிடிப்பது மேலும் மேலும் கடினமாகி வந்தது. கடைசியாய்ச் சீட்டு வாங்கிய 100 பேரும் 500 புதிய ஆட்களைப் பலிக்காகத் தேடிப்பிடித்துச் சீட்டுகளை விற்க வேண்டியிருந்தது. நகரில் சீட்டுகள் பெருக்கெடுக்க ஆரம்பித்துவிட்டன, சீட்டுகள் வாங்குவோரைத் தேடிப் பிடிப்பது மெத்தக் கடினமாகி வந்தது.

இந்த வியாபாரத்தில் இழுக்கப்படுவோரின் எண்ணிக்கை வதந்தி பரவும் அசுர வேகத்தில் (முந்திய கதையைப் பார்க்கவும்) அதிகரித்துச் செல்கிறது. இந்த எண்களின் கூம்புக் கோபுர அடுக்கு வருமாறு:

1
4
20
100
500
2,500
12,500
62,500

நகரம் பெரிதாய் இருந்து அதில் மிதிவண்டி விடுவோரின் எண்ணிக்கை 62,500 ஆக இருக்குமாயின், இந்தப் பெரும் பெருக்கு எட்டாவது சுற்றிலேயே ஓய்ந்து போய்விடும். அதற்குள் ஒவ்வொருவரும் இந்தக் கூத்தினுள் இழுக்கப்பட்டு விடுவார், ஆனால் ஐந்தில் ஒரு பகுதியினருக்கே மிதிவண்டிகள் கிடைக்கும். ஏனையோரிடம் சீட்டுகள்தான் இருக்கும், இவர்கள் இந்தச் சீட்டுகளை விற்பதற்கு வழி ஏதும் இருக்காது.

இன்னும் அதிக மக்களையுடைய நகரத்தில், பத்துலட்சக் கணக்கிலான மக்களைக் கொண்ட நவீனத் தலைநகரிலுங்கூட, மேலும் ஒரு சில சுற்றுகளில் யாவும் முடிவுற்றுவிடும். ஏனெனில் எண்களின் கூம்புக் கோபுர அடுக்கு அசுர வேகத்தில் விரிந்து செல்கிறது. ஒன்பதாவது சுற்றிலும் அதற்கு அடுத்த சுற்றுகளிலும் கிடைக்கும் எண்களாவன:

3,12,500
15,62,500
78,12,500
3,90,62,500

பன்னிரண்டாவது சுற்றில் ஒரு நாடு பூராவிலுமுள்ள மக்கள் இந்தக் கூத்தில் இழுக்கப்பட்டு விடுவார்கள் என்பது தெரிகிறது. இவர்களில் ஐந்தில் நான்கு பகுதியோர் இந்த மோசடியின் மூலவர்களால் ஏமாற்றப்பட்டு விடுவார்கள்.

மோசடியின் மூலவர்களுக்குக் கிடைக்கும் ஆதாயம் என்ன? இவர்கள் மக்களில் ஐந்தில் நான்கு பகுதியினரை எஞ்சிய ஒரு பகுதியினர் வாங்கும் பண்டங்களுக்காகப் பணம் தரும்படி கட்டாயப்படுத்திவிடுகிறார்கள், அதாவது ஐந்தில் நான்கு பகுதியினரை எஞ்சிய ஒரு பகுதியினருக்குத் திறை கட்டும்படிச் செய்துவிடுகிறார்கள். அதோடு இவர்கள் தமது பண்டங்களை விற்றுத் தருவதற்குத் தொண்டர்களாய் முன் வரும் சிப்பந்திகளின்—அதுவும் துடிப்புமிக்க சிப்பந்திகளின்—பெரும் படை ஒன்றையும் பெற்றுக் கொள்கிறார்கள். ''பரஸ்பர மோசடியின் பெரும் பெருக்கு'' என்பதாய் ருஷ்ய எழுத்தாளர் ஒருவர் இந்தக் கூத்தினைக் குறிப்பிட்டது முற்றிலும் நியாயமே. கணக்குப் போட்டுப் பார்த்து மோசடிகளிலிருந்து தம்மைத் தற்காத்துக் கொள்ளத் தெரியாதவர்கள் தான் அதிகமாய் ஏமாற்றப்பட்டு இழப்புக்கு உள்ளாகின்றனர் என்பதைத் தவிர இந்த விவகாரம் குறித்து வேறு ஒன்றும் சொல்வதற்கில்லை.

53. சன்மானம்.—

பண்டைய ரோமாபுரியில் நடைபெற்றதாய்ப் பழங்கதை ஒன்று பின்வரும் சம்பவத்தைக் கூறுகிறது.*

1

ரோமானியத் தளபதி தெரன்தியஸ் படையெடுத்துச் சென்று வெற்றிகள் பெற்றபின் வெற்றித்திறைகளுடன் தலைநகருக்குத் திரும்பி ரோமானியப் பேரரசனிடம் வந்தான்.

---

* பிரிட்டனில் தனியார் நூலகம் ஒன்றில் இருக்கும் லத்தீனியக் கையெழுத்துச் சுவடியில் கூறப்படுவதன் சரளமான மொழிபெயர்ப்பு.

பேரரசன் அன்பு பொங்க அவனை வரவேற்று ரோமானியப் பேரரசுக்கு ஆற்றிய பெருஞ் சேவைக்காக அவனைப் பாராட்டியதோடு, பேராட்சி மன்றத்தில் உயர் பதவி அளித்து அவனைச் சிறப்பிக்கப் போவதாய் வாக்களித்தான்.

ஆனால் தெரன்தியஸ் இம்மாதிரியான சன்மானத்தை விரும்பவில்லை.

''மாமன்னனே, தங்களது வல்லமையையும் கீர்த்தியையும் ஓங்கச் செய்யும் பல வெற்றிகள் பெற்று வந்துள்ளேன்'' என்றான் அவன். ''சாவைக் கண்டு நான் அஞ்சியதில்லை, ஒன்றுக்குப் பதில் பல ஆயுட்கள் பெற முடிந்திருந்தால் அத்தனையும் தங்களுக்காகத் தியாகம் புரிந்திருப்பேன். ஆனால் போர் புரிந்து நான் களைத்துப் போய்விட்டேன், முன்பு போல் தற்போது நான் இளைஞனல்ல, எனது நாளங்களில் இரத்தம் முன்பு போல் பொங்கியெழவில்லை. ஓய்வு பெற்று நான் எனது முன்னோர்களது இல்லத்துக்குத் திரும்பி வாழ்க்கையைச் சுவைக்க வேண்டிய காலம் வந்துவிட்டது.''

''தெரன்தியசே, அப்படியானால் நீ விரும்புவது என்ன?'' என்று பேரரசன் வினவினான்.

''மாமன்னா, தாங்கள் எனக்கு அருள் புரிய வேண்டும். அனேகமாய் என் வாழ்வு முழுதுமே போர்வீரனாய் இருந்து வந்திருக்கிறேன், எனது போர்வாளில் இரத்தக் கறை படியச் செய்திருக்கிறேன். செல்வம் திரட்ட எனக்கு நேரம் கிடைக்கவில்லை. ஏழையாகவே இருக்கிறேன்....''

''வீரம் செறிந்த தெரன்தியஸ், உன் மனதில் இருப்பதைச் சொல்'' என்று பேரரசன் இடைமறித்தான்.

''தங்கள் படையாளுக்குத் தாங்கள் சன்மானம் அளிக்க விரும்பினால், எனது எஞ்சிய வாழ்வை நான் அமைதியாய்ச் செல்வச் செழிப்புடன் வாழத் தாங்கள் அனுக்கிரகம் செய்ய வேண்டும். சிறப்புகளையோ, வல்லமை மிக்க பேராட்சி மன்றத்தில் பதவியையோ நான் நாடவில்லை. அதிகாரப் பொறுப்புகளிலிருந்தும் பொதுப் பணியிலிருந்தும் ஓய்வு பெற்று அமைதியாய் வாழ விரும்புகிறேன். மாமன்னா, எனது எஞ்சிய நாட்களை நான் இனிதே கழிக்க எனக்குப் போதிய அளவு திரவியம் தந்தருள வேண்டும்.''

பேரரசன் கொடை வள்ளலல்ல, சரியான கஞ்சன் என்று கூறுகிறது இந்தப் பழங்கதை. பணத்தைச் செலவிட மனம்

ஒப்பாதவன். என்ன செய்யலாம் என்று சற்று நேரம் சிந்தித்த பின், தளபதியிடம் கேட்டான்:

''போதுமானதாய் நீ கருதும் தொகை எவ்வளவு?''

''மாமன்னனே, பத்துலட்சம் தினேரி கிடைத்தால் போதும்.''

பேரரசன் மௌனமாய் இருந்தான், தளபதி தலைவணங்கியவாறு நின்றிருந்தான்.

முடிவில் பேரரசன் பதிலளித்தான்: ''வீரமிக்க தெரன்தியசே, நீ மாபெரும் தளபதி, பெரும் சிறப்புக்குரிய உன் செயல்களுக்கு நான் தக்கபடி சன்மானம் அளிக்க விரும்புகிறேன். போதிய அளவு உனக்குத் திரவியம் தரப் போகிறேன். நாளைக்கு நண்பகலில் எனது தீர்மானத்தைச் சொல்வேன்.''

தெரன்தியஸ் தலை குனிந்து வணக்கம் செலுத்தி விடை பெற்றுக் கொண்டான்.

2

மறுநாள் அரசவைக்குத் திரும்பி வந்தான் தெரன்தியஸ்.

''வீரமிக்க தெரன்தியஸ், வாழ்க நீ!'' என்று அவனை வரவேற்றான் பேரரசன்.

தளபதி பணிவுடன் தலை குனிந்து வணக்கம் செலுத்தினான்.

''மாமன்னா, தங்களது தீர்மானத்தை அறிந்து செல்ல வந்திருக்கிறேன். அடியேனுக்குச் சன்மானம் அளிக்கப் போவதாய்ச் சொல்லியிருந்தீர்கள்.''

''ஆம்'' என்றான் பேரரசன். ''பெரும் சிறப்புக்குரிய உன்னைப் போன்ற ஒரு தளபதிக்குச் சன்மானமளிப்பதில் கஞ்சத்தனம் செய்ய விரும்பவில்லை நான். எனது கருவூலத்தில் பத்துலட்சம் தெனேரி பெறுமானமுள்ள பித்தளைக் காசுகள் இருக்கின்றன. நான் சொல்வதைக் கவனமாய்க் கேள்: நீ எனது கருவூலத்துக்குச் சென்று ஒரு காசு எடுத்து இங்கே கொண்டு வா. மறுநாளன்று திரும்பவும் சென்று முதல் நாளன்று எடுத்ததைப் போல் இரு மடங்கு பெறுமானமுள்ள இன்னொரு காசு எடுத்து வந்து முதற் காசுடன் சேர்த்து வை. மூன்றும் நாளன்று நான்கு மடங்கு பெறுமானமுள்ள

காசு, நான்காம் நாளன்று எட்டு மடங்கு பெறுமானமுள்ள காசு, ஐந்தாம் நாளன்று பதினறு மடங்கு பெறுமானமுள்ள காசு, இப்படி ஒவ்வொரு நாளும் முந்திய நாள் கிடைத்ததைப் போல் இரட்டிப்பு மதிப்புள்ள காசு உனக்குத் தரப்படும்; நாள்தோறும் உனக்குத் தருவதற்காகத் தக்க மதிப்புள்ள காசைத் தயார் செய்து வைக்கும்படி நான் உத்தரவிடுவேன். காசைத் தூக்கி வருவதற்கு உனக்கு பலம் இருக்கும் வரையில் தொடர்ச்சியாய் நாள்தோறும் நீ கருவூலத்துக்குச் சென்று காசை எடுத்து வரலாம். ஆனல் வேறு யாருடைய உதவியும் இல்லாமல் நீயேதான் காசை எடுத்து வர வேண்டும். உன்னல் காசைத் தூக்க முடியாமற் போனதும் கருவூலத்துக்குப் போவதை நீ நிற்பாட்டிக் கொள்ள வேண்டும், அன்ருேடு நமது ஒப்பந்தம் முடிவுற்றுவிடும். அது வரை நீ எடுத்து வந்து வைத்திருக்கும் எல்லாக் காசுகளும் உனக்கு நான் தரும் சன்மானமாகிவிடும்.''

பேரரசன் கூறியதைத் தெரன்தியஸ் மிகவும் ஆவலோடு கேட்டுக் கொண்டிருந்தான். கருவூலத்திலிருந்து தான் எடுத்து வந்து சேர்க்கும் காசுகள் எவ்வளவு ஏராளமாயிருக்கு மென மனத்துள் நினைத்துப் பார்த்து மகிழ்ந்து கொண் டான்.

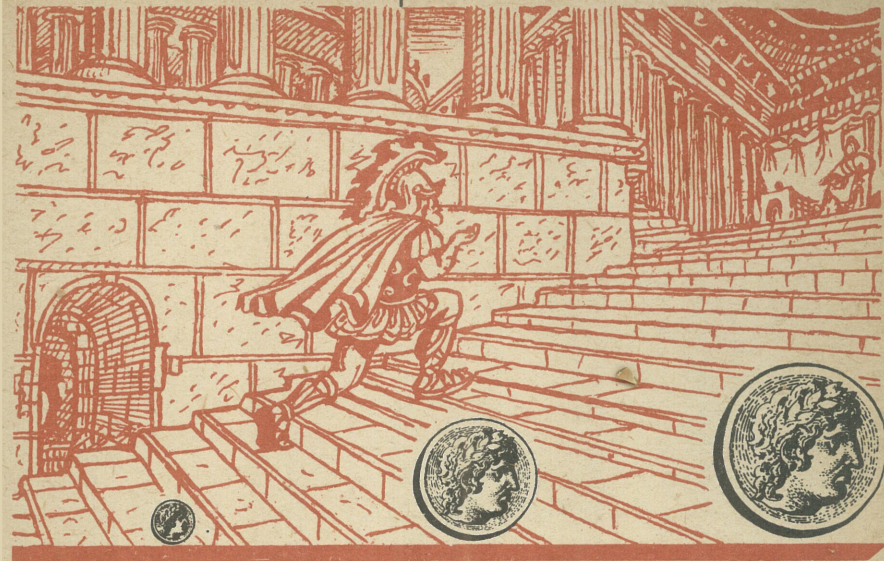
''மாமன்ன, தங்களது தயாள சிந்தையை எவ்வளவு போற்றினலும் தகும்'' என்று மகிழ்ந்து கூறி நன்றி தெரிவித் தான் தளபதி. ''தாங்கள் தரும் சன்மானம் ஒப்பற்றதாகும்!'' என்ருன்.

3

ஆகவே அரசவைக்கு அருகிலிருந்த கருவூலத்துக்குத் தினமும் சென்று வரலானன் தெரன்தியஸ். ஆரம்பத்தில் அவன் எந்தச் சிரமுமின்றி அங்கிருந்து தனக்குரிய காசை எடுத்து வர முடிந்தது.

முதல் நாளன்று தெரன்தியஸ் எடுத்து வந்த காசு 21 மில்லிமீட்டர் விட்டமுடையதாய் இருந்தது, அதன் எடை 5 கிராம்.

இரண்டாவது, மூன்ருவது, நான்காவது, ஐந்தாவது, ஆருவது காசுகளையும் அவன் சுலபமாய் எடுத்து வர முடிந் தது—அவற்றின் எடை முறையே 10, 20, 40, 80, 160 கிராம்தான்.



படம் 38. முதலாவது காசு.

படம் 39. ஏழாவது காசு.

படம் 40. ஒன்பதாவது காசு.

ஏழாவது காசின் எடை 320 கிராம், அதன் விட்டம் $8\frac{1}{2}$ சென்டிமீட்டர் (அல்லது, சுருராய்ச் சொல்வதெனில் 84 மில்லிமீட்டர்*).

எட்டாம் நாளன்று அவன் முதலாவது காசைப் போல் 128 மடங்கு பெறுமானமுள்ள ஒரு காசை எடுத்து வர வேண்டியிருந்தது. அதன் எடை 640 கிராம், விட்டம் சுமார் $10\frac{1}{2}$ சென்டிமீட்டர்.

ஒன்பதாம் நாளன்று அவன் பேரரசனிடம் எடுத்து வந்த காசு முதலாவது காசை விட 256 மடங்கு அதிக மதிப்பும், 1.250 கிலோகிராம் எடையும் 13 சென்டிமீட்டர் விட்டமும் உடையது.

---

* சாதாரண காசைவிட 64 மடங்கு அதிக கனமுள்ள காசின் விட்டமும் தடிமனும் 4 மடங்கே கூடுதலாய் இருக்கும், ஏனெனில் $4 \times 4 \times 4 = 64$. கதையில் பிற்பாடு நாம் காசுகளின் பருமனைக் கணக்கிடுகையில் இதை நினைவில் வைத்திருக்க வேண்டும்.

பன்னிரண்டாம் நாளன்று காசின் விட்டம் ஏறத்தாழ 27 சென்டிமீட்டரும், எடை 10.250 கிலோகிராமும் ஆகி விட்டது.

தளபதியை எப்போதுமே அன்புடன் வரவேற்று முகமன் கூறி வந்தான் பேரரசன். இப்போது அவனுல் தனது வெற்றிப் புன்னகையை மறைத்துக் கொள்ள முடிய வில்லை. தெரன்தியஸ் இது வரை 12 தரம் கருவூலத்துக்குச் சென்று வந்துவிட்டான், இரண்டாயிரத்துக்குச் சற்றே அதிகமான பித்தளைக் காசுகளையே அவன் கொண்டு வந்து சேர்க்க முடிந்தது என்று பேரரசன் தன்னுள் கூறிக் கொண் டான்.

பதின்மூன்ரும் நாளன்று தெரன்தியசுக்கு 4,096 பித் தளைக் காசுகளுக்குச் சமமான பெறுமானமுள்ள ஒரு காசு கிடைத்தது. அதன் விட்டம் சுமார் 34 சென்டிமீட்டர், எடை 20.5 கிலோகிராம். இதற்கு அடுத்த நாள் கிடைத்த காசு இன்னும் கனமாகவும் பெரிதாகவும் இருந்தது: அதன் எடை 41 கிலோகிராம், விட்டம் 42 சென்டி மீட்டர்.

''வீரத் தளபதியே, களைத்துப் போய்விட்டாயா, என்ன?'' என்று பெருமுயற்சி செய்து சிரிப்பை அடக்கிக் கொண்டு கேட்டான் பேரரசன்.

''மாமன்னு, அதெல்லாம் இல்லை'' என்று பதிலளித்து முகத்தைச் சுளித்தவாறு நெற்றி வியர்வையைத் துடைத்துக் கொண்டான் தெரன்தியஸ்.

பதினைந்தாம் நாள் வந்தது. என்றையும்விட பளு மிகுந்த சுமையைத் தூக்கிக் கொண்டு தெரன்தியஸ் அரசவைக்குள் வந்தான். அவன் கொண்டு வந்த காசு பெறுமானத்தில் 16,384 பித்தளைக் காசுகளுக்குச் சமமானது. அதன் விட்டம் 53 சென்டிமீட்டர், எடை ஏறத்தாழ 82 கிலோகிராம்—உயரமான ஒரு படையாளின் எடைக்கு ஒப்பானது.

பதினுரும் நாளன்று சுமையைத் தூக்கி வந்த போது, தளபதியின் கால்கள் அதிர்ந்தாடின. 32,768 பித்தளைக் காசு களின் பெறுமானமுள்ள காசை அவன் சுமந்து வந்தான், அதன் எடை 164 கிலோகிராம், விட்டம் 67 சென்டிமீட்டர்.

தளபதிக்கு மேல்மூச்சு வாங்கிற்று, திணறிக் கொண்டு அரசவைக்குள் வந்தான். அவனை வரவேற்ற பேரரசனின் முகத்தில் நகைப்பு பளிச்சிட்டது....

படம் 41. பதினொன்றாவது காசு.

படம் 42. பதின்மூன்றாவது காசு.

படம் 43. பதினைந்தாவது காசு.

அடுத்த நாள் தளபதி உள்ளே வருவதைக் கண்டபோது பேரரசன் சிரித்துக் கொண்டான். தெரன்தியசால் தனக்குக் கிடைத்த காசைத் தூக்கி வர முடியவில்லை, உருட்டி உள்ளே கொண்டு வந்தான். அதன் விட்டம் 84 சென்டிமீட்டர், எடை 328 கிலோகிராம். அதன் பெறுமானம் 65,536 பித்தளைக் காசுகள்.

பதினெட்டாம் நாள்தான் தளபதி தன் செல்வத்தைப் பெருக்கிச் செல்ல முடிந்த கடைசி நாள். தெரன்தியஸ் கருவூலத்துக்குச் சென்று காசை எடுத்து அரசவைக்குக் கொண்டு வந்தது அன்றோடு முடிவுற வேண்டியதாகியது. இம்முறை அவன் 1,31,072 பித்தளைக் காசுகளின் பெறுமானமுள்ள ஒரு காசைக் கொண்டு வந்தான். அதன் விட்டம் ஒரு மீட்டருக்கும் அதிகமாகும், எடை 655 கிலோகிராமாகும். தனது வேலினை நெம்புகோலாய் உபயோகித்துக் காசை உள்ளே உருட்டிக் கொண்டு வந்து சேர்த்தான். பேரரசனின் காலடியில் அது படீரென விழுந்தது.

தெரன்தியஸ் அறவே ஓய்ந்து போய்விட்டான்.

படம் 44. பதினாறாவது காசு.
படம் 45. பதினேழாவது காசு.

''போதும்... இவ்வளவு போதும்...'' என்று முக்கித் திணறியவாறு கூறினான்.

பேரரசனுக்கு ஆனந்தம் பொறுக்க முடியவில்லை, பெரும் பாடுபட்டுச் சிரிப்பை அடக்கிக் கொண்டான். பேரரசன் சாமர்த்தியமாய்த் தனது தளபதியை மடக்கிவிட்டான். கருவூலத்திலிருந்து தெரன்தியஸ் எடுத்துக் கொண்ட பணம் எவ்வளவு என்று கணக்கிட்டுச் சொல்லும்படி பிற்பாடு கருவூலத் தலைவனுக்குக் கட்டளையிட்டான் மாமன்னன்.

கருவூலத் தலைவன் கணக்கிட்டுச் சொன்னான்.

''மாமன்னா, தங்கள் அருளுடன் வீரத் தளபதி தெரன் தியசுக்கு 2,62,143 பித்தளைக் காசு சன்மானம் கிடைத்திருக் கிறது.''

கஞ்சப் பேரரசன் இவ்வாறு தனது தளபதி கேட்ட பத்துலட்சம் டினேரியில் சுமார் இருபதில் ஒரு பங்கு தொகையையே அவனுக்குக் கொடுத்து அனுப்பினான்.

படம் 46. பதினெட்டாவது காசு.

* * *

கருவூலத் தலைவன் கணக்கிட்டுச் சொன்ன தொகை சரி தானா என்று பார்ப்போம், அதே போது காசுகளின் எடையையும் கணக்கிடுவோம். கருவூலத்திலிருந்து தெரன்தியஸ் தினசரி எடுத்துச் சென்ற காசின் பெறுமானமும் எடையும் வருமாறு:

இரண்டாவது பத்தியிலுள்ள எண்களைக் கூட்டுவதற்கான எளிய முறை நமக்குத் தெரியும் (பக்கங்கள் 111-112ல் கூறப்பட்ட அதே விதியைத்தான் இங்கும் அனுசரிக்க வேண்டும்). இதன்படி நமக்குக் கிடைக்கும் விடை 2,62,143. தெரன்தியஸ் கேட்ட சன்மானம் 10,00,000 டினேரி, அதாவது 50,00,000 பித்தளைக் காசுகள். ஆனால்

$$50{,}00{,}000 \div 2{,}62{,}143 \approx 19$$

மடங்கு குறைவான தொகையே அவனுக்குக் கிடைத்தது.

	பெறுமானம்			எடை	
முதல் நாள். . . .	1	பித்தளைக்	காசு	5	கிராம்
இரண்டாம் நாள். . . .	2	,,	,,	10	,,
மூன்றும் நாள். . . .	4	,,	,,	20	,,
நான்காம் நாள். . . .	8	,,	,,	40	,,
ஐந்தாம் நாள். . . .	16	,,	,,	80	,,
ஆறும் நாள். . . .	32	,,	,,	160	,,
ஏழாம் நாள். . . .	64	,,	,,	320	,,
எட்டாம் நாள். . . .	128	,,	,,	640	,,
ஒன்பதாம் நாள். . . .	256	,,	,,	1.280	கிலோ கிராம்
பத்தாம் நாள். . . .	512	,,	,,	2.560	,,
பதினென்றும் நாள். . . .	1,024	,,	,,	5.120	,,
பன்னிரண்டாம் நாள். . . .	2,048	,,	,,	10.240	,,
பதின்மூன்றும் நாள். . . .	4,096	,,	,,	20.480	,,
பதினன்காம் நாள். . . .	8,192	,,	,,	40.960	,,
பதினைந்தாம் நாள். . . .	16,384	,,	,,	81.920	,,
பதினறும் நாள். . . .	32,768	,,	,,	163.840	,,
பதினேழாம் நாள். . . .	65,536	,,	,,	327.680	,,
பதினெட்டாம் நாள். . . .	1,31,072	,,	,,	655.360	,,

54. சதுரங்கம் பற்றிய கதை.*—

உலகின் மிகப் பழைய விளையாட்டுகளில் ஒன்ருகும் சதுரங்கம். மிகப் பல நூற்ருண்டுகளுக்கு முன்பே கண்டு பிடிக்கப்பட்ட ஒரு விளையாட்டு இது. ஆகவே இதைப்பற்றிய கதைகள் பலவும் வழக்கில் இருப்பதில் வியப்பில்லை. கர்ண பரம்பரையாய்க் கூறப்படும் இக்கதைகள் மெய்தாஞ என்று முடிவாய்ச் சொல்வதற்கில்லை. இந்தக் கதைகளில் ஒன்றை உங்களுக்குக் கூற விரும்புகிறேன். சதுரங்கம் ஆடத் தெரியாதவர்களும்கூட இந்தக் கதையைப் புரிந்துகொள்ளலாம். 64 சதுரக் கட்டங்களைக் கொண்ட பலகையில் ஆடப்படும் ஓர் ஆட்டம் என்பது மட்டும் தெரிந்திருந்தால் போதும்.

1

சதுரங்கம் இந்தியாவில் தோன்றியது என்பது கர்ண பரம்பரைக் கதை.

சதுரங்கத்தில் சாதுர்யமான ஆட்ட முறைகள் கணக்கின்றி இருப்பதைக் கண்ட ஷெராம் மன்னன் மட்டற்ற மகிழ்ச்சி கொண்டான். தனது குடிமக்களில் ஒருவர்தான் இந்த ஆட்டத்தைக் கண்டுபிடித்தார் என்பது தெரிந்ததும், இந்த அதியற்புத ஆட்டத்தைக் கண்டுபிடித்தவருக்குத் தக்க வெகுமதி அளிக்க விரும்பி அவரைத் தன்னிடம் அழைத்து வரும்படிக் கட்டளையிட்டான்.

இந்த ஆட்டத்தைக் கண்டுபிடித்தவரின் பெயர் சேத்தா. பலருக்கும் கல்வி போதித்து ஜீவித்து வந்தவர் அவர். எளிய உடைகள் உடுத்திய இந்தப் பெரியவர் மன்னன் எதிரே வந்து நின்ருர்.

''இந்த அரிய ஆட்டத்தைக் கண்டுபிடித்த உங்களுக்கு நான் வெகுமதி அளிக்க விரும்புகிறேன்'' என்று மன்னன் அவரிடம் சொன்ஞன்.

பெரியவர் தலை குனிந்து வணங்கிஞர்.

''உங்கள் உள்ளத்து விருப்பம் எதுவாயினும் அதை நிறைவேற்றி வைக்கும் அளவுக்கு என்னிடம் செல்வங்கள்

* இங்கு நான் கூறுவது ஆதி கதையைத் தழுவியமைந்ததாகும்.—ஆசிரியர்.

இருக்கின்றன. உங்களுக்கு வேண்டியதைச் சொல்லுங்கள், உடனே தருகிறேன்.''

சேத்தா மௌனமாய் நின்றிருந்தார்.

''கூச்சப்பட வேண்டாம், நீங்கள் விரும்புவதைச் சொல்லுங்கள், உங்கள் விருப்பத்தை நிறைவேற்ற எதையும் செய்ய நான் சித்தமாய் இருக்கிறேன்'' என்று கூறி மன்னன் அவருக்குத் தைரியமூட்டினன்.

''மன்னனே, உனது அன்பு எல்லையற்றது. ஆயினும் நான் பதிலளிப்பதற்கு அவகாசம் தர வேண்டும். நன்கு ஆலோசித்து நாளைக்கு இங்கு வந்து எனது பதிலைத் தெரிவிக்கிறேன்'' என்ருர் பெரியவர்.

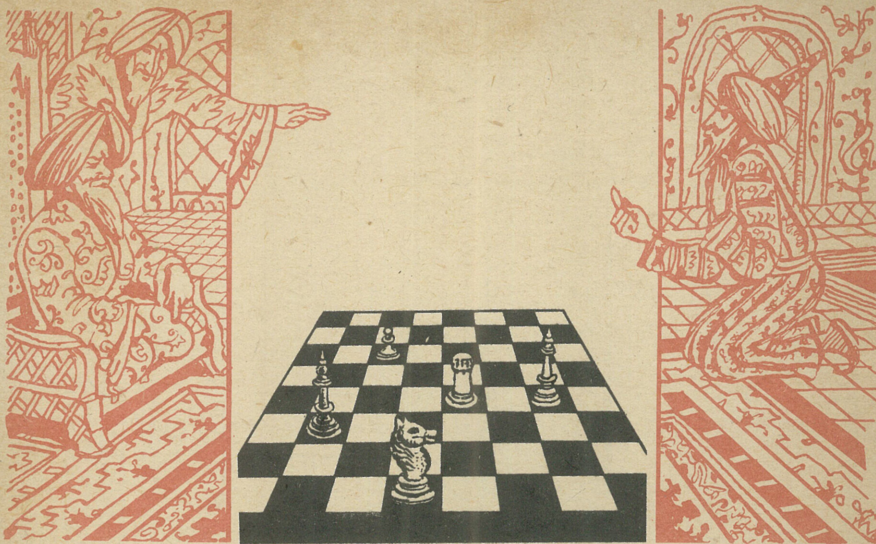
மறு நாள் சேத்தா தெரிவித்த விருப்பம் மன்னன் வியப்புறும்படி அவ்வளவு சர்வ சாதாரணமாய் இருந்தது.

''மன்னனே, சதுரங்கப் பலகையின் முதற் கட்டத்துக்கு எனக்கு ஒரு கோதுமைத் தாணிய மணி தர வேண்டும்'' என்று ஆரம்பித்தார் பெரியவர்.

''என்ன, ஒரேயொரு மணி தானியமா?'' மன்னனுல் தன் காதுகளை நம்ப முடியவில்லை.

''மன்னனே, முதற் கட்டத்துக்கு ஒரு மணி தானியம் போதும். இரண்டாவது கட்டத்துக்கு இரண்டு மணி, மூன்ருவதற்கு நான்கு மணி, நான்காவதற்கு எட்டு மணி, ஐந்தாவதற்குப் பதினறு மணி, ஆருவதற்கு முப்பத்திரண்டு மணி....''

''போதும், நிறுத்தும்'' என்ருன் சலிப்புற்று விட்ட மன்னன். ''சதுரங்கப் பலகையிலுள்ள 64 கட்டங்களுக்கும் நீர் கேட்பது போல் ஒவ்வொன்றுக்கும் அதற்கு முந்தியக் கட்டத்தைப்போல் இரு மடங்கான தானிய மணிகள் தரப்படும். ஆனுல் எனது கொடைத் திறனுக்கு ஏற்றதல்ல உமது இந்த வேண்டுகோள். பெரியவரே, இம்மாதிரியான ஓர் அற்ப வெகுமதியைக் கேட்டு நீர் எனது சிறப்புக்குக் களங்கம் உண்டாக்குகிறீர். கல்வி போதிக்கும் ஆசிரியராகிய நீர் உமது மன்னனின் மாண்பினைப் போற்றுவதில் முன்னுதாரணமாய்த் திகழ வேண்டியவர் அல்லவா? சரி, போய்ச் சேரும்! எனது சேவகர்கள் உமக்கு உமது தானிய மூட்டையைத் தருவார்கள்.''



படம் 47. ''இரண்டாவது கட்டத்துக்கு இரண்டு மணி தானியம்...''

சேத்தா புன்னகை புரிந்தவாறு வெளியே சென்றார், வெகுமதியைப் பெறுவதற்காக வாயில் அருகே காத்திருந்தார்.

2

மதிய உணவருந்த சென்ற போது மன்னனுக்குச் சேத்தாவைப் பற்றிய நினைவு வந்தது, ''பாங்கறியாத'' அந்தக் கண்டுபிடிப்பாளர் கேட்ட அற்ப வெகுமதியை அவருக்குக் கொடுத்தாகிவிட்டதா என்று விசாரித்தான்.

''மன்னனின் கட்டளை நிறைவேற்றப்பட்டு வருகிறது. அரசவைக் கணக்கர்கள் அந்தப் பெரியவருக்குத் தரப்பட வேண்டிய தானிய மணிகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிட்டுக் கொண்டிருக்கிறார்கள்'' என்பதாய்ப் பதில் கிடைத்தது.

மன்னன் முகத்தைச் சுளித்துக் கொண்டான். தனது கட்டளை நிறைவேற்றப்படுவதில் என்றுமில்லாதபடி ஏன் இந்தத் தாமதம் என்று புரியாமல் மன்னன் தன்னுள் கடிந்து கொண்டான்.

அன்று இரவு படுக்கச் செல்லுமுன் மன்னன் மீண்டும் விசாரித்தான், சேத்தாவுக்குரிய தானிய மூட்டை கொடுக்கப் பட்டுவிட்டதா என்று.

''மன்னனே, கணக்கர்கள் தொடர்ச்சியாய் முனைந்து வேலை செய்கிறார்கள், பொழுது விடிவதற்குள் கணக்கிட்டு விடை கூறுவதாய்ச் சொல்கிறார்கள்'' என்று பதில் கிடைத்தது.

கோபமுற்றுவிட்ட மன்னன் ''ஏன் இப்படி மெதுவாய் வேலை செய்கிறார்கள்?'' என்று இரைந்தான். ''நான் விழித்தெழுவதற்குள் சேத்தாவுக்கு உரியது ஒரு மணிகூட பாக்கியில்லாமல் தரப்பட்டுவிட வேண்டும். ஒரே கட்டளையை இரண்டாம் தடவையும் இடுபவனல்ல நான்!''

அரசவைத் தலைமைக் கணக்கர் அரசனைப் பார்ப்பதற்காகக் காத்திருப்பதாய்ப் பொழுது விடிந்ததும் மன்னனிடம் தகவல் தெரிவிக்கப்பட்டது.

அவரை உள்ளே வரச் சொல்லி உத்தரவிட்டான் மன்னன்.

''நீர் வந்த காரியத்தைச் சொல்லுமுன் நான் இதைத் தெரிந்து கொள்ள விரும்புகிறேன்: சேத்தா நம்மிடம் கேட்ட அந்த அற்ப வெகுமதி அவருக்குத் தரப்பட்டு விட்டதா?'' என்றான் மன்னன் ஷெராம்.

''மன்னவா, இதை முன்னிட்டுதானே இப்படி அதிகாலையிலே மன்னன் எதிரே வந்து நிற்கிறேன்'' என்றார் அந்த முதுபெரும் கணக்கர். ''சேத்தாவுக்குத் தரப்பட வேண்டிய தானிய மணிகளின் எண்ணிக்கையை நாங்கள் அயராது பாடுபட்டுக் கணக்கிட்டோம். இந்த எண்ணிக்கை பிரம்மாண்டமானது....''

''பிரம்மாண்டமானதாய் இருந்தால் இருக்கட்டும்!'' என்று மன்னவன் பொறுமையிழந்தவனாய் அவரை இடைமறித்தான். ''எனது களஞ்சியங்கள் காலியாகிவிடப் போவதில்லை. நான் வாக்களித்த வெகுமதியை உடனே அவருக்குத் தந்தாக வேண்டும்!'' என்றான்.

''மன்னவா, சேத்தாவின் விருப்பத்தை நிறைவேற்றுவது நம் சக்திக்கு அப்பாற்பட்டது. சேத்தா கேட்கும் தானியம் மன்னனின் எல்லாக் களஞ்சியங்களிலும் இருப்பதைக்

காட்டிலும் அதிகமாகும். அந்த அளவு தானியம் நமது அரசில் விளையவில்லை, அனைத்து உலகிலுங்கூட விளையவில்லை. மன்னனின் வாக்கு நிறைவேற்றப்பட வேண்டுமாயின், உலகின் நிலப் பரப்பு அனைத்தையும் கோதுமைப் பயிர் நிலங்களாய் மாற்றினுலுங்கூடப் போதாது, எல்லாக் கடல்களையும் இறைத்து, தொலை தூர வடபகுதிலுள்ள பனிவெளிகளில் உறைந்து கிடக்கும் பனியை நீக்கி யாவற்றையும் கழனிகளாக்கும்படி கட்டளையிட்டாக வேண்டும். புவிப்பரப்பு அனைத்திலும் கோதுமைப் பயிரிடப்படுமாயின், ஒருவேளை அப்போது நமக்குச் சேத்தாவுக்கு வெகுமதி அளிப்பதற்குப் போதிய அளவில் தானியம் கிடைக்கலாம்.''

தலைமைக் கணக்கர் கூறியதைக் .கேட்ட அரசன் திகைத்துப் போய்விட்டான்.

''இந்த பிரம்மாண்ட எண்ணிக்கைதான் எவ்வளவு?'' என்று அவன் அச்சத்துடன் கேட்டான்.

''மன்னவா, அது 1,84,467,44,07,370,95,51,615!'' என்றூர் தலைமைக் கணக்கர்.

3

இவ்வாறு கூறுகிறது அந்தப் பழங்க்தை. இது உண்மையில் நடைபெற்றதுதானு என்று நாம் அறியோம். ஆனுல் சேத்தா வெகுமதியாய்க் கேட்ட தானிய மணிகளின் எண்ணிக்கை இம்மாதிரியான ஓர் அசுர அளவிலானது என்பதில் ஐயமில்லை. சிறிதளவு பொறுமை இருக்குமாயின் நாமே இதைக் கணக்கிட்டுப் பார்த்துக்கொள்ளலாம். ஒன்றிலிருந்து ஆரம்பித்து பின்வருமாறு பெருகிச் செல்லும் 64 எண்களை நாம் கூட்டியாக வேண்டும்: 1, 2, 4, 8, 16.... சதுரங்கப் பலகையின் 64ஆவது கட்டத்துக்குச் சேத்தா பெற வேண்டிய தானிய மணிகளின் எண்ணிக்கை 2இன் 63ஆவது மடிப் பெருக்கத்துக்குச் சமம். பக்கங்கள் 111-112ல் கூறப்பட்ட முறையைக் கையாளுவோமாயின், 2^{64} என்பதன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டு அதிலிருந்து 1ஐக் கழித்தபின் கிடைப்பதே எல்லாக் கட்டங்களுக்குமான தானிய மணிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை.

2^{64} என்பதன் மதிப்பைக் கணக்கிட 2ஐ தொடர்ச்சியாய் 64 தரம் எழுதி எல்லா இரண்டுகளையும் பெருக்கியாக வேண்டும்:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots .\ 64 \text{ தரம்.}$$

இந்தப் பெருக்கலைச் சுலபமாக்குவதற்காக, இந்த 64 காரணிகளை பத்து 2களைக் காரணிகளாய்க் கொண்ட 6 காரணித் தொகுதிகளாகவும் நான்கு 2களைக் காரணிகளாய்க் கொண்ட கடைசிக் காரணித் தொகுதி ஒன்ருகவும் பிரித்துக் கொள்ளலாம்:

$$2^{10} = 1{,}024; \quad 2^4 = 16.$$

ஆகவே நமக்கு வேண்டிய பெருக்குத் தொகை:

$$1{,}024 \times 1{,}024 \times 1{,}024 \times 1{,}024 \times 1{,}024 \times 1{,}024 \times 16.$$

$$1{,}024 \times 1{,}024 = 10{,}48{,}576.$$

இனி நாம் கணக்கிட வேண்டியது:

$$10{,}48{,}576 \times 10{,}48{,}576 \times 10{,}48{,}576 \times 16$$

என்ற பெருக்குத் தொகையிலிருந்து 1ஐக் கழித்தாக வேண்டும். கிடைக்கும் விடைதான் தானிய மணிகளின் எண்ணிக்கை:

$$1{,}84{,}467{,}44{,}07{,}370{,}95{,}51{,}615.$$

இந்த அசுர எண்ணின் பரிமாணம் உண்மையில் எப்படி இருக்கும் என்று மனக் கண்ணுல் நீங்கள் காண விரும்பினுல், இவ்வளவு தானியத்தையும் சேமித்து வைப்பதற்குத் தேவைப்படும் களஞ்சியம் எவ்வளவு பெரிதாய் இருக்குமென்று கற்பனை செய்து பாருங்கள். ஒரு கன மீட்டர் கோதுமையில் 1,50,00,000 தானிய மணிகள் இருக்கும் என்பது நமக்குத் தெரியும். எனவே, சதுரங்கத்தைக் கண்டு பிடித்தவர் வெகுமதிமாய்க் கேட்ட கோதுமைக்கு ஏறத்தாழ 12,00,000,00,00,000 கன மீட்டர், அல்லது 12,000 கனக் கிலோமீட்டர் பரிமாணமுள்ள களஞ்சியம் தேவையாய் இருக்கும். 4 மீட்டர் உயரமும் 10 மீட்டர் அகலமும் கொண்ட களஞ்சியத்தை எடுத்துக் கொள்வோமாயின், இதன் நீளம் 30,00,00,000 கிலோமீட்டர் இருந்தாக வேண்டும், அதாவது பூமியிலிருந்து சூரியனுக்குள்ள தொலைவைப் போல் இரண்டு மடங்கு இருந்தாக வேண்டும்.

அரசனால் சேத்தாவின் வேண்டுகோளை நிறைவேற்ற முடியவில்லை. ஆனால் கணிதத்தில் அவன் தேர்ந்தவனாய் இருந் திருந்தால், தனது இக்கட்டான நிலையைச் சாமர்த்தியமாய்ச் சமாளித்திருக்கலாம்—சேத்தாவிடம் அவருக்குரிய தானிய மணிகளை அவரே ஒவ்வொன்றாய் எண்ணி எடுத்துக் கொள்ள வேண்டுமெனச் சொல்லியிருக்கலாம்.

ஒரு தானிய மணியை எண்ணுவதற்கு ஒரு வினாடி ஆவ தாய்க் கொண்டால், கணப் பொழுதும் ஓய்வின்றி இராப் பகலாய் சேத்தா எண்ணிச் சென்றாலுங்கூட, முதல் நாளன்று சேத்தாவால் 86,400 தானிய மணிகளையே எண்ண முடிந் திருக்கும். பத்து நாட்களுக்குக் குறையாமல் எண்ணிச் சென் றாராயின், 10 லட்சம் தானிய மணிகளை எடுத்துக் கொண் டிருப்பார். ஒரு கன மீட்டர்—அதாவது 32 பறை—கோது மையில் இருக்கும் தானிய மணிகளை எண்ணி முடிப்பதற்கு ஆறு மாதங்கள் வேண்டியிருக்கும். ஓயாமல் 10 ஆண்டுகளுக்கு எண்ணிச் செல்வதாயின், சுமார் 640 பறை கோதுமை எடுக்க முடிந்திருக்கும். ஆகவே சேத்தா தமது எஞ்சிய வாழ்வு அனைத்தும் தொடர்ந்து தானிய மணிகளை எண்ணிச் சென்றாலும்கூட, அவர் கேட்ட வெகுமதியில் மிக மிக அற்ப மான பங்கினையே அவர் எடுக்க முடிந்திருக்கும்.

55. அதிவேக இனப் பெருக்கம்.—

கசகசா பழத்தில் கடுகு போன்ற சிறு விதைகள் ஏராள மாய் இருக்கின்றன. ஒவ்வொரு விதையிலுமிருந்து ஒரு புதிய கசகசா செடியை வளர்க்கலாம். நாம் விதைக்கும் எல்லா விதைகளும் செடிகளாய் வளருமாயின் நமக்குக் கிடைக்கும் செடிகளின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு? இதற்கு நாம் ஒரு கச கசா பழத்தில் இருக்கும் விதைகள் எத்தனை என்று எண்ணி யாக வேண்டும். தொல்லை பிடித்த வேலைதான் என்றாலும், சுவையான முடிவுகளைத் தெரிவிப்பதால் பொறுமையுடன் கருதாய் எண்ணிக் கணக்கிடுவோம். ஒவ்வொரு பழத்தி லும் சராசரி 3,000 விதைகள் இருக்கின்றன என்று எண்ணிக் கணக்கிடுகிறீர்கள்.

அதனால் என்ன? இந்தக் கசகசா செடியைச் சுற்றிலும் விளைநிலப் பரப்பு இருக்குமாயின், ஒவ்வொரு விதையும் ஒரு செடியாய் வளர்ந்து அடுத்த கோடைக்குள் மொத்தம் 3,000

செடிகள் பயிராகிவிடும் என்பதைக் காண்கிறீர்கள். ஒரே யொரு கசகசா செடியிலிருந்து அடர்த்தியான கசகசா வயலே ஒன்று உருவாகிவிடுகிறது.

இதன் பிறகு என்ன நடைபெறும் என்று பார்ப்போம். இந்த 3,000 செடிகளில் ஒவ்வொன்றும் குறைந்தது ஒரு கசகசா பழமாவது அளிக்கும் (பல சந்தர்ப்பங்களில் அதிக மாகவே அளிக்கும்). ஒவ்வொரு பழத்திலும் 3,000 விதை கள் இருக்கும். எனவே இரண்டாம் ஆண்டின் முடிவில் குறைந்தது

$$3{,}000 \times 3{,}000 = 90{,}00{,}000$$

கசகசா செடிகள் வளர்ந்துவிடும்.

நமது ஒரேயொரு கசகசா பழத்திலிருந்து மூன்றும் ஆண் டின் முடிவில் வளர்ந்து விடும் கசகசா செடிகளின் எண்ணிக் கையை எளிதில் நாம் கணக்கிடலாம்:

$$90{,}00{,}000 \times 3{,}000 = 2{,}700{,}00{,}00{,}000.$$

நான்காம் ஆண்டின் முடிவில்:

$$2{,}700{,}00{,}00{,}000 \times 3{,}000 = 81{,}00{,}000{,}00{,}00{,}000.$$

ஐந்தாம் ஆண்டின் முடிவில் உலகப் பரப்பே போதாத படி கசகசா செடிகளின் எண்ணிக்கை அவ்வளவு அதிகமாகி விடும்:

$$81{,}00{,}000{,}00{,}00{,}000 \times 3{,}000 = 2{,}430{,}00{,}00{,}000{,}00{,}00{,}000.$$

எல்லாக் கண்டங்களையும் தீவுகளையும் சேர்த்துப் பூமியின் மொத்தத் தரைப் பரப்பு 13,50,00,000 சதுர கிலோமீட்ட ராகும், அதாவது 1,35,00,000,00,00,000 சதுர மீட்ட ராகும். ஐந்தாம் ஆண்டின் முடிவில் இருக்கக் கூடிய கசகசா செடிகளின் எண்ணிக்கையைவிட இது ஏறத்தாழ 2,000 மடங்கு குறைவாகும்.

ஆக, எல்லாக் கசகசா விதைகளும் செடிகளாய் வளருமாயின், ஒரு கசகசா பழத்தின் விதைகளிலிருந்து தோன்றக் கூடிய செடிகள் ஐந்து ஆண்டுகளில் பூமியின் நிலப் பரப்பு முழுவதையும் மூடிவிடும் — சதுர மீட்ட

படம் 48. சிங்கப்பற் செடிஓராண்டில் 100விதைகளைஅளிக்கிறது.

ருக்கு 2,000 செடிகள் வீதம் அடர்ந்துவிடும். ஒரு சிறு கசகசா விதையானது தன்னுள் ஓர் அசுர எண்ணை அல்லவா மறைத்து வைத்திருக்கிறது?

இவ்வளவு அதிக விதைகளை அளிக்காத வேருெரு செடி இப்படிப் பெருகுமாயின் என்ன ஆகுமென நாம் கணக்கிட்டுப் பார்க்கலாம், அப்போதும இதே முடிவைத்தான் வந்தடைவோம்—ஆனுல் இச்செடியின் வழிவரும் தலைமுறைகள் புவிப் பரப்பு பூராவையும் மூடுவதற்கு ஐந்து ஆண்டுகளுக்குச் சற்று அதிக காலம் தேவையாய் இருக்கும். உதாரணமாய் ஆண்டுக்கு சராசரி 100 விதைகள் தரக் கூடிய சிங்கப்பற் செடியை (dandelion)* எடுத்துக் கொள்ளலாம். எல்லா விதைகளும் செடிகளாய் வளருமாயின், நமக்குக் கிடைக்கும் செடிகளின் எண்ணிக்கை வருமாறு:

முதல்	ஆண்டின்	முடிவில்	. . . . 1 செடி
இரண்டாம்	,,	,,	. . . . 100 ,,
மூன்ரும்	,,	,,	. . . . 10,000 ,,
நான்காம்	,,	,,	. . . . 10,00,000 ,,
ஐந்தாம்	,,	,,	. . . . . . 10,00,00,000 ,,
ஆரும்	,,	,,	. . . . 1,000,00,00,000 ,,
ஏழாம்	,,	,,	. . 1,00,000,00,00,000 ,,
எட்டாம்	,,	,,	. 1,00,00,000,00,00,000 ,,
ஒன்பதாம்	,,	,,	100,00,00,000,00,00,000 ,,

* அரிதே என்ருலும் ஆண்டுக்கு 200 விதைகள் வரை தரக்கூடிய சிங்கப்பற் செடிகளும் இருக்கின்றன.

பூமியின் நிலப் பரப்பிலுள்ள சதுர மீட்டர்களைக் காட்டிலும் இந்த எண்ணிக்கை 70 மடங்கு அதிகமாகும்.

ஆகவே ஒன்பதாம் ஆண்டின் முடிவில் எல்லாக் கண்டங்களும் சிங்கப்பற் செடிகளால் மூடப்பட்டுவிடும்—சதுர மீட்டருக்கு 70 செடிகள் வீதம் மண்டிவிடும்.

ஆனால் இம்மாதிரியான நிலைமை ஏற்படாமல் இருக்கக் காரணம் என்ன? இதுவேதான் காரணம்: மிகப் பெரும் பகுதி விதைகள் மண்ணில் ஊன்றி முளைத்துச் செடியாகும் முன்பே அழிந்துவிடுகின்றன—சத்தில்லாத மண்ணில் பதிகின்றன, அல்லது முளைத்து வேர் விட முடியாதபடி பிற செடிகளால் நசுக்கப்படுகின்றன, அல்லது பிராணிகளால் அழிக்கப்படுகின்றன. விதைகளும் செடிகளும் இப்படிப் பெரிய அளவில் அழிக்கப்படாமல் இருக்குமாயின் ஒவ்வொரு செடியும் சொற்ப காலத்துக்குள் எங்கும் பரவி உலகப் பரப்பையே மூடிவிடக் கூடியதாய் இருக்கும்.

செடிகள் மட்டுமின்றி பிராணிகளும் இப்படிச் செய்யக் கூடியவையே. பிராணிகள் மடிந்து போகாமல் இருக்குமாயின், ஆணும் பெண்ணுமாகிய ஒரு ஜோடியிலிருந்து ஜனிக்கும் தலைமுறைகள் விரைவில் உலகெங்கும் அளவிறந்தனவாய்ப் பெருகிவிடும். உயிர் வகைகளின் இனப் பெருக்கம் சாவினுல் தடையிடப்படாவிடில் என்ன நேரும் என்பதற்குப் பெரும் பெரும் பரப்புகளில் மண்டிப் பெருகிவிடும் வெட்டுக்கிளித் திரள்கள் மிகத் தெளிவான எடுத்துக்காட்டு. இருபது முப்பது ஆண்டுகளில் எல்லாக் கண்டங்களிலும் காடுகளும் புல்வெளிகளும் தழைத்துப் பெருகிவிடும். அவற்றில் கோடானு கோடியான உயிரினங்கள் வாழ்விடத்துக்காகத் தம்முள் அடித்து மோதிக்கொண்டு போராடும். மாகடல்களில் கப்பல்கள் செல்ல முடியாதபடி மீன்கள் அவ்வளவு அபரிமிதமாய்ப் பெருகிவிடும். கதிரவனது ஒளியை நாம் பார்க்க முடியாதபடி காற்றிலே பறவைகளும் ஈக்களும் அவ்வளவு மிகுதியாய் மொய்த்துக் கொண்டிருக்கும்.

உதாரணமாய், ஏராளமாய்க் காணப்படும் சாதாரண ஈயை எடுத்துக் கொள்ளுங்கள். ஒவ்வொரு பெண் ஈயும் 120 முட்டைகள் இடுவதாகவும், கோடையின் போது இந்த 120 முட்டைகளிலிருந்து 7 தலை முறைகளைச் சேர்ந்த ஈக்கள்—இவற்றில் பாதி பெண் ஈக்கள்—தோன்றுவதாகவும்

வைத்துக் கொள்ளலாம். முதலாவது முட்டைகள் ஏப்ரல் 15ல் இடப்படுவதாகவும், முட்டையிலிருந்து தோன்றும் பெண் ஈக்கள் 20 நாட்களில் தாமே முட்டையிடும் அளவுக்குப் பெரிதாகிவிடுவதாகவும் கொள்வோம். இதன் விளைவு வருமாறு:

ஏப்ரல் 15 ஒரு பெண் ஈ 120 முட்டைகள் இடுகிறது; இந்த முட்டைகளிலிருந்து மே மாத ஆரம்பத்தில் 120 ஈக்கள் வெளிப்படுகின்றன, இவற்றில் பெண் ஈக்கள் 60.

மே 5ல் ஒவ்வொரு பெண் ஈயும் 120 முட்டைகள் இடுகிறது, மே மாதத்தின் பிற்பாதியில் இவற்றிலிருந்து $60 \times 120 = 7{,}200$ ஈக்கள் வெளிப்படுகின்றன, இவற்றில் பெண் ஈக்கள் 3,600.

மே 25ல் இந்த 3,600 பெண் ஈக்களில் ஒவ்வொன்றும் 120 முட்டைகள் இடும், ஜூன் மாத ஆரம்பத்தில் $3{,}600 \times 120 = 4{,}32{,}000$ ஈக்கள் வெளிப்படும், இவற்றில் பெண் ஈக்கள் 2,16,000.

ஜூன் 14ல் ஒவ்வொரு பெண் ஈயும் 120 முட்டைகள் இடும். ஜூன் முடிவில் இம்முட்டைகளிலிருந்து 2,59,20,000 ஈக்கள் வெளிவரும், இவற்றில் பெண் ஈக்கள் 1,29,60,000.

ஜூலை 5ல் 1,29,60,000 பெண் ஈக்களில் ஒவ்வொன்றும் 120 முட்டைகள் இடும். இம்முட்டைகள் பொறிந்து 155,52,00,000 ஈக்கள் வெளிப்படும், இவற்றில் பெண் ஈக்கள் 77,76,00,000.

ஜூலை 25ல் இருக்கும் ஈக்கள் 9,331,20,00,000; இவற்றில் பெண் ஈக்கள் 4,665,60,00,000.

ஆகஸ்டு 13ல் ஈ எண்ணிக்கை 5,59,872,00,00,000 ஆகிவிடும், இதில் 2,79,936,00,00,000 பெண் ஈக்களாய் இருக்கும்.

செப்டம்பர் 1ல் முட்டைகள் பொறிந்து வெளிவரும் ஈக்கள் 3,55,92,320,00,00,000.

ஈக்களின் இனப் பெருக்கத்துக்குத் தடங்கலாய் எதுவும் செய்யப்படவில்லை, எந்த ஈயும் நாசமாகிவிடவில்லை என்றால், ஒரேயொரு கோடை காலத்துக்குள் ஜனித்துவிடக் கூடிய ஈக்களின் இந்தப் பிரம்மாண்ட அளவினை நமது மனக் கண்

படம் 49. ஈக்களின் வரிசை பூமியிலிருந்து யுரேனஸ் வரை சென்றுவிடும்.

எதிரே தெளிவாய்த் தெரியச் செய்யும் பொருட்டு, இந்த ஈக்கள் எல்லாம் சங்கிலி போல் வரிசையாய் ஒன்றின்பின் ஒன்ருய் நிற்குமாயின் எப்படி இருக்கும் என்று பார்ப்போம். ஒரு ஈயின் நீளம் 5 மில்லிமீட்டர். ஆகவே இந்த ஈ வரிசையின் நீளம் 250,00,00,000 கிலோமீட்டர் இருக்கும். அதாவது பூமிக்கும் சூரியனுக்கும் உள்ள தொலைவைப் போல் 18 மடங்கு அதிகமாய் இருக்கும் (அல்லது பூமிக்கும் தொலைக் கிரகங்களில் ஒன்ருன யுரேனசுக்கும் இடையிலுள்ள தொலைவுக்கு ஏறத்தாழச் சமமாய் இருக்கும்).

இப்பகுதியை முடிக்குமுன், சாதக நிலைமைகளில் உயிரினங்களின் இனப் பெருக்கம் நம்புதற்கரிய வேகத்தில் நடைபெறுவது குறித்து உண்மைகள் சிலவற்றைக் குறிப்பிடுதல் பொருத்தமாய் இருக்கும்.

ஆதியில் அமெரிக்காவில் சிட்டுக் குருவிகள் இருக்கவில்லை. பயிர்களுக்குச் சேதம் விளைவிக்கும் பூச்சிப் படைகளை அழித்திட வேண்டுமென்றுதான் அவை அமெரிக்க ஐக்கிய நாட்டுக்குக் கொண்டு வரப்பட்டன. சிட்டுக் குருவிகள் தீராப் பசி கொண்ட புழுக்களையும் பயிர்களுக்குச் சேதமுண்டாக்கும் பிற பூச்சிகளையும் தின்பவை என்பது தெரிந்ததே. இந்தச் சிட்டுக் குருவிகளுக்கு அமெரிக்க ஐக்கிய நாடு மிகவும் பிடித்த

மானதாய் இருந்திருக்க வேண்டும்—அங்கே அவற்றை அழிக்கக் கூடிய மிருகங்களோ பறவைகளோ அதிகம் இல்லை. ஆகவே அங்கே அவை அதிவேகமாய்ப் பெருக ஆரம்பித்தன. பூச்சிப் படைகள் குறைந்து சென்றன, ஆனால் சிட்டுக் குருவிகள் ஆனந்தமாய்ப் பெருகிவிட்டன. நாளடைவில் அவற்றுக்குப் போதுமான அளவு புழுக்களும் பூச்சிகளும் இல்லாமற் போகவே, அவை பயிர்களை அழிக்க முற்பட்டன.* சிட்டுக் குருவிகள் மீது இப்போது பெரும் போர் தொடுக்க வேண்டியதாயிற்று. இதற்குப் பணம் ஏராளமாய்ச் செலவாகிவிட்டது. ஆகவே இதற்குப் பிற்பாடு அமெரிக்க ஐக்கிய நாட்டிற்குள் பிராணிகளை வெளியிலிருந்து இறக்குமதி செய்யக் கூடாதெனத் தடை விதித்துச் சட்டம் பிறப்பிக்கப் பட்டது.

இன்னும் ஓர் உதாரணம். ஆஸ்திரேலியாவை ஐரோப்பியர்கள் கண்டுபிடித்த போது அங்கே முயல்கள் இருக்கவில்லை. 18ஆம் நூற்றாண்டின் இறுதியில் முதன் முதலாய் ஆஸ்திரேலியாவுக்கு முயல்கள் கொண்டு வரப்பட்டன. முயல்களை வேட்டையாடித் தின்னும் மிருகங்கள் அங்கே இல்லாத காரணத்தால் அவை பயங்கர வேகத்தில் பெருக ஆரம்பித்து விட்டன. விரைவில் பெரும் பெரும் கூட்டங்களில் முயல்கள் படையெடுத்துப் பயிர்களை அழிக்கலாயின. தேச அளவில் இந்த நாசம் நடைபெறவே, முயல்களை ஒழிப்பதற்காகப் பெருந் தொகைகள் செலவிட வேண்டியதாயிற்று. மக்கள் உறுதியான நடவடிக்கைகளை மேற்கொண்டு இந்த ஆபத்துக்கு முடிவு கட்டினர். ஏறத்தாழ இதை போல் பிற்பாடு கலிபோர்னியாவிலும் நடைபெற்றது.

மூன்றாவது கதை ஜமைக்காத் தீவிலிருந்து வருகிறது. அங்கே விஷப் பாம்புகள் நிறைய இருந்தன. இவற்றை ஒழிப்பதற்காக பாம்புணிப் பறவையை (secretary bird) இங்கே கொண்டு வருவதெனத் தீர்மானிக்கப்பட்டது. இப் பறவை பாம்புகளின் பரம வைரி, இங்கே இது புகுத்தப் பட்டதும் பாம்புகளின் எண்ணிக்கை குறைந்தது மெய்தான், பாம்புகளால் தின்னப்பட்டு வந்த எலிகளின் எண்ணிக்கை அதேபோது அதிகரிக்க முற்பட்டது. கரும்புக் கொல்லைகளுக்கு

* ஹவாயில் அவை ஏனைய சிறு பறவைகளுக்கு இடமில்லாதபடிச் செய்தன.

படம் 50. பாம்புணிப் பறவை.

இந்த எலிகளால் பெருஞ் சேதம் ஏற்படவே எலிகளை எதிர்த்து விவசாயிகள் போர் தொடுக்க வேண்டியதாயிற்று. எலிகளின் பகையாகிய இந்தியக் கீரிப்பிள்ளைகளில் நான்கு ஜோடிகளை அவர்கள் தருவித்தனர். இவை தங்குதடையின்றி பெருகுவதற்கு வசதி செய்யப்பட்டது. விரைவில் இவை தீவெங்கும் வெகுவாய்ப் பெருகின. பத்து ஆண்டுகளுக்குள் இவை அனேகமாய் எல்லா எலிகளையும் அழித்துவிட்டன. ஆனால் அதேபோது இவை கிடைத்ததை எல்லாம் தின்னப் பழகிக் கொண்டு நாய்க் குட்டிகள், பன்றிக் குட்டிகள், கோழிக் குஞ்சுகள் முதலானவற்றைத் தாக்கவும் முட்டைகளை நாசமாக்கவும் முற்பட்டன. இவற்றின் எண்ணிக்கை அதிக மாகியதும் பெருந் திரளாய்த் தோட்டங்களிலும் கோதுமை நிலங்களிலும் கரும்புக் கொல்லைகளிலும் புகுந்து சேதம் விளைவித்தன. ஜமைய்க்க விவசாயிகள் தமது முன்னாள்

கூட்டாளிகள் மீது இப்போது போர் தொடுக்க வேண்டிய தாயிற்று. இந்தச் சேதத்தை அவர்கள் பகுதி அளவுக்கே தடுக்க முடிந்தது.

56. இலவச விருந்துணவு.—

உயர்நிலைப் பள்ளிப் படிப்பு முடிந்து பட்டம் பெற்ற பத்து இளைஞர்கள் உணவு விடுதியில் விருந்து உண்டு இந் நிகழ்ச்சியைக் கொண்டாடுவதென முடிவு செய்தனர். உணவு விடுதியில் அவர்கள் கூடியபின் முதலாவது உண்டி வகை பரிமாறப்பட்டதும் யார் எந்த இடத்தில் அமர்வதென்று அவர்களிடையே பலத்த வாக்குவாதம் எழுந்துவிட்டது. அகர வரிசையில் எல்லாரும் உட்கார வேண்டும் என்றான் ஒருவன், வயதுக் கிரமத்தின்படி உட்கார வேண்டும் என்றான் வேறொருவன், உயரத்தின் படி வரிசையாய் உட்கார வேண்டும் என்றான் இன்னொருவன். இறுதித் தேர்வில் பெற்ற மதிப் பெண்ணின்படி உட்கார வேண்டுமென்றுகூட முன்மொழியப் பட்டது. வாக்குவாதம் ஓய்வதாய் இல்லை, இதற்குள் சாப்பாடு ஆறிவிட்டது, அப்படியும் யாரும் உட்காரவில்லை. முடிவில் பரிசாரகர் இந்தப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு கண் டார்.

''இளம் நண்பர்களே, வாதாடியது போதும். நீங்கள் எல்லாரும் அப்படியப்படியே அமர்ந்து கொண்டு நான் சொல்வதைக் கேளுங்கள்'' என்றார் அவர்.

''இப்போது நீங்கள் அமர்ந்திருக்கும் வரிசையை உங் களில் ஒருவர் குறித்து வைத்துக் கொள்ளுங்கள். நாளைக்கு இங்கே திரும்பி வந்து வேறொரு வரிசையில் அமருங்கள். நாளைக்கு மறுநாள் மற்றுமொரு வரிசையில் அமருங்கள். இவ்விதம் நாள்தோறும் வந்து வெவ்வேறு மாற்று வரிசை களிலும் அமர்ந்து செல்லுங்கள். பிறகு இப்போது நீங்கள் அமர்ந்திருக்கும் இதே வரிசையில் திரும்பவும் நீங்கள் அமர வேண்டிய நாள் வந்ததும் உங்களுக்கு விருப்பமான சிறந்த உண்டி வகைகளைப் பரிமாறி இலவசமாய் உங்களுக்கு விருந்து அளிப்பதாய் வாக்குறுதி தருகிறேன்.''

பரிசாரகர் கூறியது கவர்ச்சி மிக்கதாய் இருந்தது. ஆகவே தினம் தோறும் இந்த உணவு விடுதியில் கூடி மேஜையைச்

படம் 51. ''அப்படி அப்படியே அமருங்கள்...''

சுற்றி வெவ்வேறு வரிசையில் அமர்வதென்றும், பரிசாரகர் வாக்களித்த இலவச விருந்துக்குரிய நாள் வரும் வரை தொடர்ந்து இதைச் செய்வதென்றும் இளைஞர்கள் முடிவு செய்தனர்.

ஆனுல் அம்மாதிரியான ஒரு நாள் வரவே இல்லை. இதற்குக் காரணம் பரிசாரகர் தமது வாக்குறுதியை நிறை வேற்ருமல் நழுவிவிட்டார் என்பதல்ல, மேஜையைச் சுற்றிப் பத்துப்பேர் ஏராளமான வரிசை அமைவுகளில் அமர முடியும் என்பதே காரணமாகும். மொத்தம் 36,28,800 அமைவு களில் அவர்கள் அமர முடியும். இத்தனை அமைவுகளிலும் அவர்கள் உட்கார்ந்து பார்ப்பதற்கு ஏறத்தாழ 10,000 ஆண்டுகள் வேண்டியிருக்கும்—நீங்களே இதைக் கணக்கிட்டுச் சரிபார்த்துக் கொள்ளலாம்.

மேஜையைச் சுற்றிப் பத்துப் பேர் அமர்வதற்கு இத்தனை அமைவுகள் இருப்பதை நீங்கள் நம்ப மறுக்கிறீர்களா, என்ன? சுலபமாக்கிக் கொள்ளும் பொருட்டு, பத்துக்குப் பதிலாய் 3 பொருளை எத்தனை அமைவுகளில் வைக்கலாம் என்பதைக் கணக்கிட்டுப் பார்ப்போம். இந்த 3 பொருள் களை முறையே A, B, C என்பதாய்க் குறியிட்டுக் கொள்ள லாம்.

இப்பொருள்களை வரிசையாய் அமைக்க எத்தனை வழி கள் உண்டு என்று கணக்கிட்டுப் பார்ப்போம். முதலில் Cஐத் தனியே எடுத்து வைத்துவிட்டு எஞ்சியிருக்கும் இரு பொருள் களை எத்தனை அமைவுகளில் வைக்க முடியும் என்று பார்ப் போம். இரண்டே இரண்டு அமைவுகள்தான் உள்ளன என்பது விளங்கும்.

படம் 52. இரண்டு பொருள்களை இரண்டு விதத்தில்தான் வரிசையமைக்கலாம்.

இனி ஒவ்வொரு அமைவுக்கு முரிய ஜதையுடனும் Cஐச் சேர்த்துக்கொள்ளலாம். இதைச் செய்ய மூன்று வழிகள் உள்ளன:

1) Cஐ நாம் ஜோடிக்குப் பின்னல் வைக்கலாம்.

2) Cஐ ஜோடிக்கு முன்னல் வைக்கலாம்.

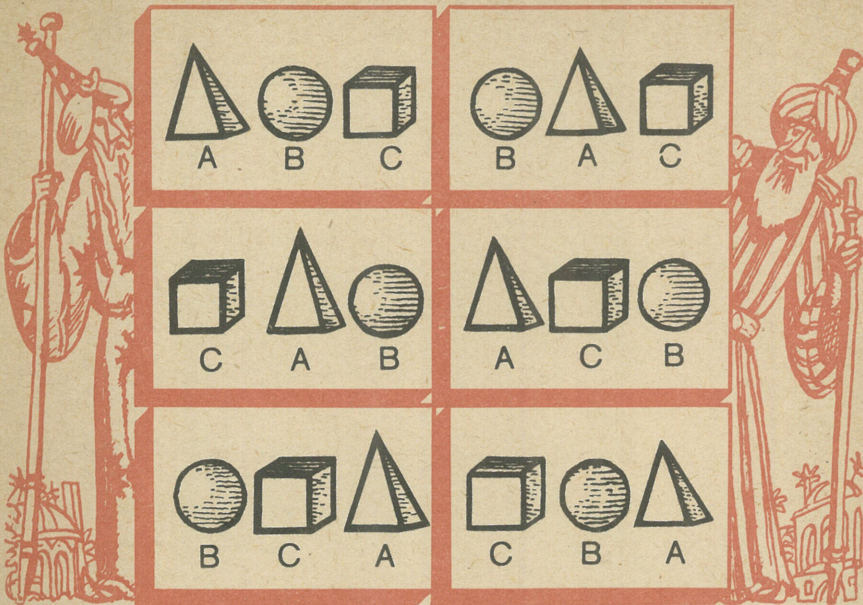
3) Cஐ ஜோடிக்கு இடையில் வைக்கலாம்.

இதையன்றி வேறு வழியில்லை என்பது விளங்குகிறது. நம்மிடம் இரண்டு ஜதை—ABயும் BAயும்—இருப்பதால், மூன்று பொருள் களையும்

$2 \times 3 = 6$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம்.

படம் 53ல் இந்த ஆறு வழி களும் காட்டப்படுகின்றன.

இனி நான்கு பொருள்களை—A, B, C, D—வரிசைப்படுத்திப் பார்ப்போம். Dஐச் சிறிது நேரம் தனியே ஒதுக்கி வைத்து விட்டு எஞ்சியுள்ள மூன்று பொருள்களை வரிசைப் படுத்திப்



படம் 53. மூன்று பொருள்களை ஆறு விதத்தில் வரிசையமைக் கலாம்.

பார்ப்போம். இதற்கு 6 வழிகள் உண்டென்பது ஏற்கனவே நமக்குத் தெரியும். இம்மூன்று பொருள்களாலான 6 அமைவுகளில் ஒவ்வொன்றுடனும் நான்காவது பொருளாகிய Dஐச் சேர்ப்பதற்கு எத்தனை வழிகள் உள்ளன? செய்து பார்ப்போம். Dஐ நாம்

1. மூன்று பொருள்களுக்கும் பின்னால் வைக்கலாம்.
2. அவற்றுக்கு முன்னால் வைக்கலாம்.
3. முதலாவதுக்கும் இரண்டாவதுக்கும் இடையில் வைக்கலாம்.
4. இரண்டாவதுக்கும் மூன்றாவதுக்கும் இடையில் வைக்கலாம்.

ஆகவே, $6 \times 4 = 24$ அமைவுகள் சாத்தியம் என்றாகிறது. ஆனால் $6 = 2 \times 3$, $2 = 1 \times 2$; எனவே அமைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

ஐந்து பொருள்களுக்கு இதே முறையைக் கையாண்டால், நமக்குக் கிடைப்பது:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

ஆறு பொருள்களுக்கு:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720.$$

இனி நமது பத்து இளைஞர்களின் விவகாரத்துக்குத் திரும்பி வரலாம். இவர்கள் அமர்வதற்குச் சாத்தியமான அமைவுகளைப் பொறுமையாய்க் கணக்கிட்டுப் பார்ப்போமாயின், நமக்குக் கிடைக்கும் எண்

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10.$$

இந்தப் பெருக்குத் தொகை மேலே நாம் குறிப்பிட்ட அதே எண்தான்:

36,28,800.

வந்திருந்த இளம் மக்களில் பாதிப் பேர் பெண்கள் என்றும், இவர்கள் மாறி மாறி ஒவ்வொரு இளைஞனின் பக்கத்திலும் உட்கார விரும்புகிறார்கள் என்றும் கொள்வோமாயின் கணக்கு இன்னும் சிக்கலானதாகிவிடும். இப்போது மாற்று வரிசைகளின் எண்ணிக்கை முந்தியதைவிட மிகவும் குறைவாகிவிடும் என்ற போதிலும் இதைக் கணக்கிடுவது முன்னிலும் கடினமாகும்.

மேஜையின் அருகே இளைஞன் ஒருவன் தான் விரும்புகிற இடத்தில் அமரட்டும். மீதியுள்ள நான்கு இளைஞர்களும் பெண்களுக்காகத் தமக்கிடையே காலி நாற்காலிகளை விட்டு விட்டு $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ மாற்று வழிகளில் அமர முடியும். மொத்தம் *10* நாற்காலிகள் இருப்பதால் முதலாவது இளைஞன் *10* மாற்று வழிகளில் உட்காரலாம். ஆகவே மேஜையைச் சுற்றி இளைஞர்கள் அமர்வதற்குள்ள மாற்று வழிகளின் எண்ணிக்கை $10 \times 24 = 240$ ஆகும்.

இளைஞர்களுக்கு இடையிலுள்ள காலி நாற்காலிகளில் ஐந்து பெண்களும் அமர்வதற்குள்ள மாற்று வழிகள் எத்தனை? $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ வழிகளே என்பது தெரிகிறது. ஒவ்வோர் இளைஞனுக்குமுள்ள *240* நிலைகளில் ஒவ்வொன்றையும் ஒவ்வொரு பெண்ணுக்குமுள்ள *120* நிலைகளில் ஒவ்வொன்று

டனும் இணைத்து சாத்தியமான மாற்று வரிசைகளின் மொத்த எண்ணிக்கையைப் பெறுகிறோம்:

$$240 \times 120 = 28,800.$$

இந்த எண் எல்லோரும் இளைஞர்களாய் இருக்கையில் கிடைக்கும் எண்ணாகிய 36,28,800ஐவிட மிகவும் குறை வானதே. 28,800 மாற்று வரிசைகளில் உட்கார்ந்து பார்ப்ப தற்கு 79 ஆண்டுகளுக்குச் சற்றே குறைவான காலம் வேண்டி யிருக்கும். இவ்விதம் இந்த இளம் ஆடவர்களுக்கும் பெண் களுக்கும் சுமார் 100 வயதாகும் போது—அந்த அளவுக்கு அவர்கள் நீண்ட ஆயுளுடையோராய் இருப்பின்—அவர் களுக்கு இந்தப் பரிசாரகரிடமிருந்தோ, இவருடைய வாரிசிட மிருந்தோ இலவச விருந்து கிடைக்கும்.

அமைவுகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுவதற்கு இப் போது நாம் தெரிந்து கொண்டு விட்டதால், ''பதினைந்து வில்லைப் புதிர்''* பெட்டியிலுள்ள வில்லைகளது அமைவு களின் எண்ணிக்கையை இனி நாம் கணக்கிட்டு நிர்ணயம் செய்யலாம். அதாவது இந்த ஆட்டத்தில் ஆட்டக்காரருக்கு வகுத்தளிக்கக் கூடிய பிரச்சினைகளின் எண்ணிக்கையை நாம் கணக்கிடலாம். வில்லைகளுக்குரிய வரிசை அமைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கையைக் கணக்கிட்டுக் கூறுவதே இங் குள்ள பணி என்பது புரிகிறது. இதைச் செய்ய நாம் பின் வரும் பெருக்கலைப் போட வேண்டுமென்பது நமக்குத் தெரியும்:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15.$$

இந்தப் பொருக்குத் தொகை: 1,30,767,43,65,000.

இந்தப் பிரம்மாண்ட எண் சாத்தியமான பிரச்சினைகளின் எண்ணிக்கையாகும், இப்பிரச்சினைகளில் ஒரு பாதி தீர்வுகாண முடியாத பிரச்சினைகளாகும். ஆகவே 60,000,00,00,000 க்கும் அதிகமான பிரச்சினைகள் தீர்க்கப்பட முடியாதவை. இது பற்றிய உணர்வு பலருக்கும் இம்மியளவும் இல்லாமற் போனதுதான் ''பதினைந்து வில்லைப் புதிருக்குத்'' தீர்வு

* வலப் பக்கத்துக் கீழ் மூலையிலுள்ள சதுரம் எப்போதும் காலியாய் இருக்க வேண்டும்.

காணும் முயற்சியில் மக்கள் அப்படி வெறித்தனமாய் ஈடுபட முற்பட்டதன் காரணம்.

ஒரு வினடிப் பொழுதில் ஒரு வில்லையை நகர்த்தி வைக்க முடியுமாயின், ஓய்ச்சல் ஒழிவின்றி முழு நேரமும் ஒருவர் இவ்வேலையில் ஈடுபடுவதாய்க் கொண்டாலுங்கூட சாத்திய மான எல்லா அமைவுகளையும் வைத்துப் பார்க்க 40,000 ஆண்டுகளுக்கு அதிகமான காலம் வேண்டியிருக்கும் என்பதை யும் இங்கு குறிப்பிட வேண்டும்.

வரிசை அமைவுகளைப் பற்றிய பரிசீலனையின் முடிவுக்கு வரும் நாம் பள்ளிக்கூட வாழ்க்கையிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காண முயலுவோம்.

ஒரு வகுப்பில் 25 மாணவர்கள் இருப்பதாய் வைத்துக் கொள்வோம். இவர்களை எத்தனை வழிகளில் அமரச் செய்ய முடியும்?

மேலே நாம் விளக்கிய பிரச்சினைகளைப் புரிந்துகொண்ட வர்கள் இந்தக் கணக்குக்கு விடை காணும் வழியை எளிதில் கூறிவிடுவார்கள். நாம் செய்ய வேண்டியது எல்லாம் 25 எண்களையும் பெருக்கிச் செல்வதுதான்:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \ldots \times 23 \times 24 \times 25.$$

பல்வேறு செய்மானங்களையும் சுலபமாக்குவதற்குக் கணிதமானது பல வழிகளையும் வகுத்தளித்திருக்கிறது. ஆனால் மேற் கூறிய பெருக்கலுக்குச் சுலப வழி எதுவும் இல்லை. பிழையின்றி எல்லா எண்களையும் பெருக்கிச் செல்வதுதான் நமக்குள்ள ஒரேயொரு வழி. காரணிகளைத் தக்கபடி தொகுதிகளாய் பகுத்து அமைத்துக் கொண்டு காலச் செலவைக் குறைத்துக் கொள்ளலாமே தவிர இங்கு வேறு ஒன்றும் செய்வதற்கில்லை.* இந்தப் பெருக்குத் தொகை பிரம்மாண்டமானதாகும் — 26 இலக்கங்களுக்கு நீண்டு செல்கிறது, நமது கற்பனை சக்திக்கு அப்பாற்பட்டதாகி விடும்படி அவ்வளவு பெரியது.

இந்த எண் இதுதான்:

15,511,21,00,433,30,98,598,40,00,000.

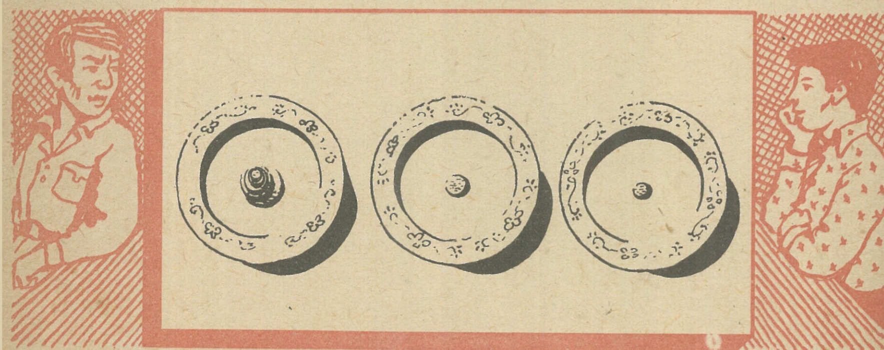
---

* இந்தப் பெருக்கலுக்கு ஸ்டர்லிங்கின் சூத்திரம் எனப்படு வதை உபயோகித்துத் தோராயமான விடையைக் கணக்கிட முடியும்.—(பதிப்பாசிரியர்.)

இதுகாறும் நாம் எதிர்பட்ட எல்லா எண்களிலும் இதுவே மிகப் பெரியது. அசுர எண்களுக்கு எல்லாம் அசுர எண் எனத்தக்கது. இதனுடன் ஒப்பிடுகையில் உலகின் எல்லாக் கடல்களிலும் மாகடல்களிலுமுள்ள நீர்த் துளிகளின் எண்ணிக்கை மிகச் சிறிதே ஆகும்.

57. காசு வித்தை.—

நான் சிறு பையனாய் இருந்த போது என் அண்ணன் காசுகளைக் கொண்டு மிகவும் சுவையான ஓர் ஆட்டம் சொல்லித் தந்தது எனக்கு நினைவு இருக்கிறது. முதலில் அவன் வரிசையாய் மூன்று தட்டுகளை வைத்தான். பிறகு வெவ்வேறு மதிப்புள்ள ஐந்து காசுகளை (ரூபிள் காசு, 50-கோப்பெக் காசு, 20-கோப்பெக் காசு, 15-கோப்பெக் காசு, 10-கோப் பெக் காசு) முதலாவது தட்டில் இங்கு குறிக்கப் பட்டிருக்கும் இதே வரிசைக் கிரமத்தில் ஒன்றின் மீது ஒன்றாய் வைத்து அடுக்கினான். பின்வரும் மூன்று விதிகளையும் அனுசரித்து இந்தக் காசு அடுக்கை மூன்றாவது தட்டுக்கு மாற்றி வைக்கச் சொன்னான்:



படம் 54. என் அண்ணனிடமிருந்து ஓர் அதிசய ஆட்டத்தைப் பற்றி தெரிந்து கொண்டேன்.

1) ஒரு நேரத்தில் ஒரேயொரு காசை மட்டும்தான் மாற்றலாம்;

2) சிறிய காசு மீது பெரிய காசை வைக்கக் கூடாது;

3) இவ்விரு விதிகளையும் அனுசரித்து காசுகளைத் தற்காலிகமாய் இரண்டாவது தட்டில் வைக்கலாம், ஆனால் முடிவில் எல்லாக் காசுகளும் ஆரம்

பத்தில் இருந்த அதே வரிசையில் மூன்ருவது தட்டில் அடுக்கப்பட்டுவிட வேண்டும்.

''விதிகள் சுலபமானவையே, செய்து காட்டு பார்ப் போம்'' என்ருன் என் அண்ணன்.

நான் 10-கோப்பெக் காசை எடுத்து மூன்ருவது தட்டில் வைத்தேன், பிறகு 15-கோப்பெக் காசை நடுத் தட்டில் வைத்தேன். பிறகு என்ன செய்வதென்று தெரியவில்லை. 20-கோப்பெக் காசை எங்கே வைப்பது? நடுத் தட்டிலும் மூன்ருவது தட்டிலுமுள்ள காசுகளைக் காட்டிலும் அது பெரிய தாயிற்றே!

''இதைக் கேள்'' என்று அண்ணன் எனக்கு ஆலோசனை கூறினுன். ''10-கோப்பெக் காசை எடுத்து 15-கோப்பெக் காசின் மீது வை. மூன்ருவது தட்டு அப்போது காலியாகி விடும், 20-கோப்பெக் காசை அதில் வைக்கலாம்.''

அவ்வாறே செய்தேன். ஆனுல் எனது தொல்லைகள் முடிவுற்றுவிடவில்லை. 50-கோப்பெக் காசை எங்கே வைப்பது? விரைவில் நான் இதற்கொரு வழி இருப்பதைக் கண்ணுற்றேன்: 10-கோப்பெக் காசை எடுத்து முதல் தட்டின் காசுகளுக்கு மேல் வைத்தேன், 15-கோப்பெக் காசை மூன்ருவது தட்டில் வைத்தேன், பிறகு 10-கோப்பெக் காசையும் மூன்ருவது தட்டுக்கு மாற்றினேன். இப்போது 50-கோப்பெக் காசை எடுத்து நடுத் தட்டில் வைக்க முடிந்தது. இப்படி மிகப் பல தரம் காசுகளை மாற்றி வைத்து, ரூபிள் காசையும் முதல் தட்டிலிருந்து மாற்றுவதிலும், இறுதியில் காசு அடுக்கு பூராவையும் மூன்ருவது தட்டுக்குக் கொண்டு வந்து சேர்ப்பதிலும் வெற்றி பெற்றேன்.

பிரச்சினைக்கு நான் தீர்வு கண்டதற்காக என்னைப் பாராட்டிய என் அண்ணன், ''சரி, நீ எத்தனை தரம் காசுகளை நகர்த்தினுய்?'' என்று கேட்டான்.

''தெரியவில்லையே, நான் எண்ணிப் பார்க்கவில்லை'' என்றேன்.

''சரி, எண்ணிப் பார்ப்போம். நகர்வுகளின் எண்ணிக்கை சாத்தியமான அளவுக்குக் குறைவாய் இருக்கும் விதத்தில் இந்தக் காரியத்தை எப்படிச் செய்யலாமென்று பார்ப்போம், சுவையாய் இருக்கும். நம்மிடம் இரண்டே காசுகள்—10-கோப்பெக், 15-கோப்பெக் காசுகள் மட்டும்—இருப்பதாய்

நினைத்துக் கொள்வோம். அப்போது எத்தனை தரம் நகர்த்தியாக வேண்டும்?''

''மூன்று தரம்—10-கோப்பெக் காசு நடுத் தட்டுக்கும், 15-கோப்பெக் காசு மூன்ருவது தட்டுக்கும் நகர்த்தியாக வேண்டும், பிறகு 10-கோப்பெக் காசை 15-கோப்பெக் காசின்மீது வைத்துவிடலாம்.''

''சரிதான், இனி மூன்ருவது காசு ஒன்றை—20-கோப்பெக் காசை—சேர்த்துக் கொண்டு, இந்தக் காசு அடுக்கை மூன்ருவது தட்டுக்குக் கொண்டு போவதற்கு எத்தனை தரம் நகர்த்த வேண்டுமென்று பார்ப்போம். முதலில் இரு சிறு காசுகளையும் நடுத் தட்டுக்குக் கொண்டு போவோம். இதற்கு மூன்று நகர்வுகள் வேண்டும் என்பது நமக்குத் தெரியும். பிறகு 20-கோப்பெக் காசை மூன்ருவது தட்டுக்கு எடுத்துச் செல்வோம். இது இன்னெரு நகர்வு ஆகிறது. இதன்பின் நடுத் தட்டிலுள்ள இரு காசுகளையும் மூன்ருவது தட்டுக்கு எடுத்துச் செல்வோம், இதற்கு மேலும் மூன்று நகர்வுகள் தேவை. ஆகவே மொத்த நகர்வுகள் $3+1+3=7$.''

''நான்கு காசுகளுக்கு வேண்டிய மொத்த நகர்வுகளை நான் கணக்கிட்டுச் சொல்கிறேன்'' என்று அவனை நான் இடைமறித்துச் சொன்னேன். ''முதலில் மூன்று சிறு காசுகளை நடுத் தட்டுக்கு எடுத்துச் செல்கிறேன். இதற்கு 7 நகர்வுகள் ஆகிவிடும். பிறகு 50-கோப்பெக் காசை மூன்ருவது தட்டுக்கு மாற்றுகிறேன். இது இன்னெரு நகர்வு. முடிவில் மூன்று சிறு காசுகளையும் மூன்ருவது தட்டுக்கு மாற்றுகிறேன், இதற்கு மேலும் 7 நகர்வு தேவை. ஆகவே மொத்த நகர்வுகள் $7+1+7=15$.''

''சபாஷ்! ஐந்து காசுகள் இருந்தால் எத்தனை நகர்வுகள் வேண்டியிருக்கும்?''

''எளிதில் சொல்லிவிடலாம்: $15+1+15=31$'' என்று சட்டெனப் பதிலளித்தேன்.

''நல்லது, இங்குள்ள சூட்சுமத்தைப் புரிந்து கொண்டுவிட்டாய் நீ. ஆனல் இதனிலும் எளிய வழி ஒன்றைச் சொல்கிறேன், கேள். நமக்குக் கிடைத்த எண்களைக் கவனி: 3, 7, 15, 31. இவை யாவும் 2ஐ அதனலேயே ஒரு தரமோ, பல தரமோ பெருக்கி வரும் தொகையிலிருந்து 1ஐக் கழித்ததும் கிடைக்கும் எண்களாகும். இதோ பார்'' என்று சொல்லி

என் அண்ணன் பின்வரும் அட்டவணையை எழுதிக் காட்டிஞன்:

$$3 = 2 \times 2 - 1$$
$$7 = 2 \times 2 \times 2 - 1$$
$$15 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1$$
$$31 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1.$$

‘‘இப்போது யாவும் தெளிவாகவே விளங்குகிறது. மாற்றி வைக்க வேண்டிய காசுகள் எத்தனேயோ அத்தனே தரம் 2ஐ அதனுலேயே பெருக்கிப் பிறகு 1ஐக் கழிக்க வேண்டும். காசு அடுக்கு எவ்வளவு பெரியதாய் இருப்பினும் அதை மாற்றி வைப்பதற்குத் தேவையான நகர்வுகளின் எண்ணிக்கையை இனி நான் கணக்கிட்டுச் சொல்லிவிடுவேன். உதாரணமாய், ஏழு காசுகள் இருந்தால், இந்தக் கணக்கு வருமாறு:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1 = 128 - 1 = 127.\text{''}$$

‘‘நல்லது, இந்தப் பண்டைக் கால வித்தையை நீ தெரிந்து கொண்டுவிட்டாய்’’ என்றுன் என் அண்ணன். ‘‘இன்னும் ஒரேயொரு விதியை நீ நினேவில் வைத்துக் கொள்ள வேண்டும்: காசுகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப் படையாய் இருக்குமாஞல், முதற் காசை எடுத்து நீ மூன்ருவது தட்டில் வைக்க வேண்டும்; இரட்டைப் படையாய் இருக்குமாஞல் நடுத் தட்டில் வைத்து ஆட்டத்தைத் துவக்க வேண்டும்.’’

‘‘பண்டைக் காலத்து ஆட்டமா இது? நீயே உருவாக்கியது என்றல்லவா நினேத்தேன்!’’ என்று நான் வியந்து கூவினேன்.

‘‘நான் உருவாக்கியது அல்ல இது, காசுகளே வைத்து இதைக் கொஞ்சம் நவீனமாக்கியதுதான் நான் செய்த வேலே. இந்த ஆட்டம் மிகமிகப் புராதன காலத்தியது ஆகும், இந்தியாவிலிருந்து வந்ததென நினேக்கிறேன். இதைப் பற்றிய சுவையான பழங்கதை ஒன்று உண்டு. காசியில் ஒரு கோயில் இருக்கிறது. பிரம தேவன் நமது உலகைப் படைத்த போது இந்தக் கோயிலில் மூன்று வைரக் குச்சிகளேப் பொருத்தி வைத்தாஞம். இந்தக் குச்சிகளில் ஒன்றில் 64 தங்க வளேயங்களே—மிகப் பெரியது அடியிலும் மிகச் சிறியது உச்சியிலும் அமையும்படியான வரிசைக் கிர

மத்தில்—மாட்டி வைத்தானும். கோயில் பூசாரிகள் ஓயாது ஒழியாது இராப் பகலாய் வேலை செய்து இந்த வளையங்களை ஒரு குச்சியிலிருந்து மற்றொன்றுக்கு மாற்றிச் செல்ல வேண்டுமாம். மூன்றாவது குச்சியை இடை நிலையாய் உபயோகித்துக் கொண்டு, வளையங்களை அவர்கள் அதே வரிசைக் கிரமத்தில் இரண்டாவது குச்சியில் அடுக்க வேண்டும். காசு அடுக்கை மாற்றும் போது அனுசரிக்கப்பட்ட அதே விதிகள் இங்கும் அனுசரிக்கப்பட வேண்டும்: ஒரு நேரத்தில் ஒரு வளையத்தை மட்டுமே மாற்றலாம், சிறிய வளையத்தின் மேல் பெரியது வரக் கூடாது. எல்லா வளையங்களும் இப்படி மாற்றி வைக்கப்படும் போது உலகம் அழிந்து போய்விடும் என்று இந்தப் பழங்கதை கூறுகிறது.''

''இந்தக் கதை கூறுவது மெய்யானால் உலகம் நெடுங் காலத்துக்கு முன்பே அழிந்து போயிருக்க வேண்டுமே.''

''இந்த 64 வளையங்களை இன்னொரு குச்சிக்கு மாற்றி வைக்க அதிக காலமாகாது என்று நினைக்கிறாய்?''

''ஆகாதுதான், இதில் சந்தேகம் என்ன? ஒரு மாற்றத்துக்கு ஒரு வினாடி ஆவதாய் வைத்துக் கொள்வோமே. ஒரு மணி நேரத்தில் 3,600 தரம் மாற்றிவிடலாம் அல்லவா?''

''அதனால் என்னவாம்?''

''அப்படியானால் ஒரு நாளில் சுமார் 1,00,000 தரமும், பத்து நாட்களில் 10,00,000 தரமும் மாற்றலாம். 1,000 வளையங்கள் இருந்தாலும் 10,00,000 தடவைகளில் அவற்றை மாற்றிவிடலாமே.''

''அது சரியல்ல. இந்த 64 வளையங்களையும் மாற்றுவதற்கு ஆகும் காலம் 50,000 கோடி ஆண்டுகளாகும்!''

''அது எப்படி? மாற்றல்களின் மொத்த எண்ணிக்கை 2ஐ அதனாலேயே 64 தரம் பெருக்கி, அதிலிருந்து 1ஐக் கழித்துக்கு வரும் தொகைக்குச் சமம். அதாவது.... இரு, இதோ ஒரு வினாடியில் உனக்கு விடையைச் சொல்லிவிடுகிறேன்.''

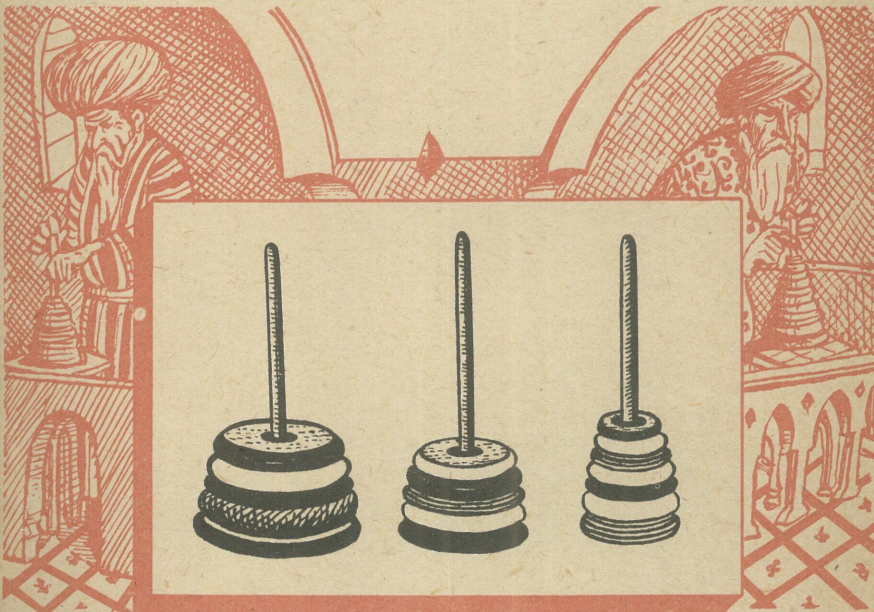
''சரி, நீ இந்தப் பெருக்கலைப் போட்டு முடி, அதற்குள் நான் வேறு சில காரியங்களைச் செய்து முடிக்க எனக்குப் போதிய நேரம் இருக்கும்.''

இவ்வாறு சொல்லிவிட்டுச் சென்றான் என் அண்ணன். நான் என் கணக்கைப் போட்டுக் கொண்டு உட்கார்ந்திருந்தேன். முதலில் நான் 2^{16}இன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டேன். அது 65,536. இந்த எண்ணை இதனாலேயே பெருக்கினேன்.

பிறகு இந்தப் பெருக்குத் தொகையை இதனுலேயே பெருக்கி வந்த எண்ணிலிருந்து 1ஐக் கழித்தேன். எனக்குக் கிடைத்த விடை

1,84,467,44,07,370,95,51,615.*

ஆம், என் அண்ணன் சொன்னதில் தவறில்லே, அது மெய் தான்!



படம் 55. பூசாரிகள் இராப் பகலாய் வேலே செய்தனர்.

நமது பூமியின் வயது எவ்வளவு என்று தெரிந்து கொள்ள அசைப்படுகிறீர்கள் அல்லவா? குத்துமதிப்பாகவே என்றுலும், இம்மாதிரியான விவரங்களே விஞ்ஞானிகள் கணக்கிட்டு வைத்திருக்கிருர்கள்:

---

* இந்த எண் நமக்குத் தெரிந்ததுதான்: சதுரங்க ஆட்டத்தைக் கண்டுபிடித்த சேத்தா தனக்குச் சன்மானமாய்க் கேட்ட தானிய மணிகளின் எண்ணிக்கையே இது.

சூரியன் இருந்துவரும் காலம்				5,00,000,00,00,000	ஆண்டுகள்
பூமி	,,	,,	,,	300,00,00,000	,,
பூமியில் உயிர்வகைகள்			,,	100,00,00,000	,,
மனிதர்கள்		,,	,,	3,00,000	,,

58. ஒரு பந்தயம்.—

படம் 56. பூவா தலையா?

நாங்கள் எங்களது விடுமுறை இல்லத்தில் அமர்ந்து உணவருந்திக் கொண்டிருந்தோம். அப்போது எங்கள் பேச்சு தற்செயல் இணைவு ஒன்றின் நிகழ்தகவு [probability] எவ்வளவு என்று நிர்ணயிப்பது பற்றித் திரும்பிற்று. எங்களிடையே இருந்த இளம் கணிதவியலாளர் ஒருவர் ஒரு காசை எடுத்து வைத்துக் கொண்டு எங்களிடம் சொன்னர்:

''இதோ பாருங்கள், நான் இந்தக் காசைப் பார்க்காமலே இதை மேஜையின் மீது விழும்படிச் சுண்டிவிடுகிறேன். தலை வருவதற்குள்ள நிகழ்தகவு எவ்வளவு?''

''முதலில் 'நிகழ்தகவு' என்றால் என்னவென்று விளக்கிச் சொல்லுங்கள், எங்களில் பலருக்கு இதைப் பற்றி தெரியாது'' என்று ஏககாலத்தில் பலரும் கூறினர்.

''எளிதில் அதை விளக்கிச் சொல்லிவிடலாம். காசு கீழே வந்து விழுவதற்குச் சாத்தியமான வழிகள் இரண்டே இரண்டுதான்: தலை அல்லது பூ (படம் 56). இவற்றில் ஒன்று சாதக நிகழ்வு. இதிலிருந்து நமக்குப் பின்வரும் தொடர்பு கிடைக்கிறது:

$$\frac{\text{சாதக நிகழ்வுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{சாத்தியமான நிகழ்வுகளின் எண்ணிக்கை}} = \frac{1}{2}.$$

''1/2 என்கிற பின்னம் தலை விழுவதின் நிகழ்தகவைக் குறிக்கிறது.''

படம் 57. பகடை.

''காசின் விவகாரத்தில் நிகழ்தகவைநிர்ணயிப்பதுஎளிதுதான்'' என்று இடைமறித்தார் யாரோ ஒருவர். ''இன்னும் கொஞ்சம் சிக்கலான விவகாரத்தில்—எடுத்துக்காட்டாய், பகடைக் காயின் விவகாரத்தில் — நிகழ்தகவை நிர்ணயித்துச் சொல்லுங்கள் பார்க்கலாம்'' என்றார் அவர்.

''சரி'' என்று ஒத்துக் கொண்டார் கணிதவியலாளர். ''பகடைக் காயை எடுத்துக் கொள்வோம். அது கனசதுர வடிவமுடையது, அதன் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் எண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகள் பதிக்கப் பட்டிருக்கின்றன (படம் 57). உதாரணமாய் 6 என்னும் எண் வருவதற்குள்ள நிகழ்தகவு எவ்வளவு? இங்கு சாத்திய மான நிகழ்வுகள் எத்தனை? பகடைக் காய் ஆறு பக்கங்களைக் கொண்டது. ஆகவே 1லிருந்து 6 வரையிலான எந்த எண் ணும் வரலாம். இங்கு நமக்குச் சாதக நிகழ்வு என்பது எண் 6 வரும் நிகழ்வாகும். இதன் நிகழ்தகவு 1/6 ஆகும்.''

''எந்த நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவையும் கணக்கிட முடியு மா?'' என்று வினவினார் ஒரு பெண். ''உதாரணமாய் இதை எடுத்துக் கொள்வோம். நமது சன்னலைக் கடந்து செல்லும் முதலாவது ஆண் ஆடவனாகவே இருக்கும் என்பதாய் என் மனதில் ஒரு எண்ணம் தோன்றுகிறது. எனது எண்ணம் சரி யாகிவிடுவதன் நிகழ்தகவு எவ்வளவு?''

''ஒரு வயது ஆண் குழந்தையையும் ஆடவனாய்க் கொள் வதாய் நாம் ஒத்துக்கொண்டால், இந்த நிகழ்தகவு 1/2 ஆகும். ஏனெனில் நமது உலகில் ஆடவரும் பெண்டிரும் சம எண்ணிக் கையில் இருக்கிறார்கள்.''

“சன்னலைக் கடந்து செல்லும் முதலாவது இரு ஆட்களும் ஆடவர்களாய் இருப்பதன் நிகழ்தகவு எவ்வளவு?” என்று கேட்டார் இன்னொருவர்.

“இதைக் கணக்கிடுவது சற்று சிக்கலான காரியமாய் இருக்கும். சாத்தியமான எல்லா இணைவுகளையும் ஆலோசித்துப் பார்ப்போம். முதலாவதாக, இருவரும் ஆண்களாய் இருக்கலாம். இரண்டாவதாக, முதலாவது ஆள் ஆணாகவும் இரண்டாமவர் பெண்ணாகவும் இருக்கலாம். மூன்றாவதாக, இதற்கு நேர் மாறாய் முதலாமவர் பெண்ணாகவும் இரண்டாமவர் ஆணாகவும் இருக்கலாம். நான்காவதாக, இருவரும் பெண்களாய் இருக்கலாம். ஆக சாத்தியமான இணைவுகள் 4. இவற்றில் ஒன்றுதான்—முதலாவது மட்டும் தான்—சாதகமான நிகழ்வு. ஆகவே நிகழ்தகவு 1/4 ஆகும். இதுவே உங்கள் கேள்விக்குரிய விடை.”

“இது தெளிவாய் விளங்குகிறது, ஆனால் மூன்று ஆண்களைக் கொண்டதாய் இக்கணக்கை வகுத்துக் கொள்ளலாம். அப்போது நமது சன்னலைக் கடந்து செல்லும் முதல் மூவர் ஆண்களாய் இருப்பதன் நிகழ்தகவு எவ்வளவு?”

“இதையும் கணக்கிடுவோம். சாத்தியமான அமைவுகளின் எண்ணிக்கையை முதலில் கணக்கிடுவோம். கடந்து செல்வோர் இருவராய் இருப்பின் அமைவுகளின் எண்ணிக்கை 4 ஆகுமென்பதை மேலே கண்டோம். மூன்றாவது ஒருவரும் கடந்து செல்வதாய்ச் சேர்த்துக் கொள்வதன் மூலம் நாம் சாத்தியமான அமைவுகளின் எண்ணிக்கையை இரு மடங்கு ஆக்குகிறோம், எப்படியெனில் கடந்து செல்லும் இருவரது 4 தொகுதிகளில் ஒவ்வொன்றில் ஓர் ஆணோ அல்லது ஒரு பெண்ணோ சேர்ந்து கொள்ளலாம். ஆகவே இப்போது சாத்தியமான அமைவுகளின் எண்ணிக்கை $4 \times 2 = 8$ ஆகும். நமக்கு வேண்டியதன் நிகழ்தகவு 1/8 ஆகும், ஏனெனில் அமைவுகளில் ஒன்று மட்டுமே நமக்கு வேண்டியதாகும். நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிடுவதற்கான முறையை எளிதில் நினைவில் வைத்துக் கொள்ளலாம்: கடந்து செல்வோர் இருவராய் இருக்கையில் நிகழ்தகவு $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; மூவரா

இருக்கையில் அது $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$; நால்வராய் இருக்கையில் அது நான்கு அரைகளின் பெருக்குத் தொகையாகும். இவ்விதம் நிகழ்தகவு மேலும் மேலும் குறைந்து செல்கிறது.''

''அப்படியானல் பத்துப் பேர் கடந்து செல்லும் போது நிகழ்தகவு எவ்வளவு?''

''கடந்து செல்லும் முதலாவது பத்துப் பேரும் ஆண்களாய் இருப்பதன் நிகழ்தகவு எவ்வளவு என்றுதானே கேட்கிறீர்கள்? இதற்கு நாம் 10 அரைகளின் பெருக்குத் தொகையைக் கணக்கிட்டாக வேண்டும். அது 1/1024. இதன் பொருள் என்னவெனில், இப்படி நடைபெறுமென்று நீங்கள் 1 ரூபிள் பந்தயம் கட்டினுல், அப்படி நடக்காதென்று நான் 1,000 ரூபிள் பந்தயம் கட்டலாம்.''

''என்னைக் கவர்வதாய் இருக்கிறதே, நீங்கள் கட்டும் பந்தயம்!'' என்று அங்கிருந்தோரில் ஒருவர் வியந்து கூறினுர். ''ஆயிரம் ரூபிள் வெல்வதற்கு நான் ஒரு ரூபிள் பந்தயம் கட்டத் தயாராயிருக்கிறேன்.''

''ஆனுல் நீங்கள் இந்தப் பந்தயத்தில் வெற்றி பெறுவதற்கு ஆயிரத்தில் ஒன்று வீதமே வாய்ப்பிருக்கிறது என்பதை மறந்துவிடுகிறீர்களே.''

''அதைப் பற்றி நான் கவலைப்படவில்லை. கடந்து செல்லும் முதல் நூறு பேர் அனைவரும் ஆண்களாய் இருப்பார்கள் என்றுகூட நான் ஆயிரத்துக்கு எதிராய் ஒரு ரூபிள் பந்தயம் கட்டத் தயார்.''

''இதன் நிகழ்தகவு அற்பத்திலும் அற்பம் என்பதை நீங்கள் உணரத் தவறுகிறீர்கள்.''

''பத்துலட்சத்தில் ஒன்ருய் அல்லது இதை யொத்ததாய் இருக்கும்.''

''இல்லை, சொல்ல முடியாதபடி மிகமிக அற்பமாகும். கடந்து செல்லும் முதல் 20 பேர் ஆண்களாய் இருப்பதன் வாய்ப்புதான் பத்துலட்சத்தில் ஒன்று. முதல் 100 பேருக்கு இது எவ்வளவு தெரியுமா... இருங்கள், இதா காகிதத்தில் கணக்குப் போட்டுப் பார்த்துச் சொல்கிறேன். 100 பேருக்கு இந்த நிகழ்தகவு—ஐயையோ—

1/100,00,00,000,00,00,000,00,00,000,00,00,000!

''அவ்வளவுதானே!''

''இந்த எண் குறைவாய் இருப்பதாகவா நினைக்கிறீர்கள்? ஒரு மாகடலிலுள்ள நீர்த் துளிகள்கூட இவ்வளவு இருக்காதே, இதனிலும் 1,000 மடங்கு குறைவான எண்ணுக்கும் கம்மியாக அல்லவா இருக்கும்.''

''ஆம், இந்த எண் பயங்கரமானதுதான்! ஆனால் எனது ரூபிளுக்கு எதிராய் நீங்கள் எவ்வளவு பந்தயம் கட்டுகிறீர்கள்!''

''ஒ, என்னிடம் இருப்பவை அனைத்தையும் கட்டுகிறேன்!''

''அனைத்தையுமா? வேண்டாம், அது அளவு மீறியதாகிவிடும். உங்களுடைய மிதிவண்டியைப் பந்தயம் கட்டுங்கள். ஆனால் நீங்கள் துணிவீர்கள் என்று நான் நினைக்கவில்லை.''

''துணிவேன் என்று நினைக்கவில்லையா? சரி, வாருங்கள் பார்க்கலாம். எனது மிதிவண்டியைப் பந்தயம் கட்டுகிறேன். எப்படியும் நான் ஒன்றும் இழக்க நேர்ந்துவிடாது.''

''நானும்தான். ஒரு ரூபிள் ஒன்றும் பெரிய காரியமல்ல! நான் வெற்றி பெற்றால் ஒரு மிதிவண்டி கிடைக்கும், நீங்கள் வெற்றி பெற்றால் உங்களுக்குக் கிடைக்கக் கூடியது ஒரேயொரு ரூபிள்தான்.''

''ஆனால் நீங்கள் வெற்றி பெற முடியவே முடியாதென்பது தெரியவில்லையா உங்களுக்கு? ஆனால் உங்களுடைய ரூபிள் ஏற்கனவே எனது பைக்கு வந்துவிட்ட மாதிரிதான்.''

''வேண்டாம் இது'' என்று கணிதவியலாளரின் நண்பர் ஒருவர் அவரிடம் சொல்லிப் பார்த்தார். ''ஒரு ரூபிளுக்கு எதிராய் ஒரு மிதிவண்டியைப் பந்தயம் கட்டுவது பைத்தியக்காரச் செயலாகும்.''

''இல்லை, இல்லை!'' என்றார் கணிதவியலாளர். ''இம்மாதிரியான நிலைமையில் ஒரேயொரு ரூபிளேயானாலும் பந்தயம் கட்ட முன்வருவதுதான் பைத்தியக்காரச் செயல். இவர் இதை இழக்கவே போகிறார், சந்தேகமில்லை. பணத்தைக் கரியாக்குவதற்கு ஒப்பான செயல் இது.''

''சொற்ப அளவேனும் வாய்ப்பு இருக்கிறது, அல்லவா?''

''இருக்கிறது, ஒரு மாகடலுடன் ஒப்பிடுகையில் ஒரு துளி நீர் எவ்வளவோ அவ்வளவு இருக்கிறது. உண்மையில் பத்து மாகடலுடன் ஒப்பிட வேண்டும். உங்களுக்குள்ள இந்தத் துளியளவு வாய்ப்புக்கு எதிராய் எனக்குப் பத்து மாகடல்களின் அளவு வாய்ப்பு இருக்கிறது. இரண்டும்

இரண்டும் நான்கு என்பது எவ்வளவு உறுதியோ அவ்வளவு உறுதியாகும் எனது வெற்றி.''

''உங்கள் கற்பனையை நீங்கள் தறி கெட்டு ஓடச் செய்கிறீர்கள்'' என்று இடையில் புகுந்து கூறினர் வயதான ஒரு பேராசிரியர்.

''பேராசிரியரே, நீங்களுங்கூட இவருக்கு வாய்ப்பு இருக்கிறதென்ரு நினைக்கிறீர்கள்?''

''எல்லா நிகழ்வுகளும் சம அளவுக்கு சாத்தியமானவை அல்ல—இதை நீங்கள் கணக்கில் எடுத்துக் கொண்டீர்களா? தற்செயல் இணைவு ஒன்றின் நிகழ்தகவு எப்போது பிழையற்றதாய் இருக்க முடியும்? சம அளவுக்குச் சாத்தியமான நிகழ்வுகளாய் இருக்கும் போது மட்டுமேதான். ஆனால் இங்கே நிகழ்வுகள்.... காதில் விழுகிறதா? இனியாவது நீங்கள் உங்களுடைய தவறை உணருவீர்களென நினைக்கிறேன். வெளியே பட்டாளத்து இசைக் குழு இசைப்பது காதில் விழுகிறதா?''

''ஆம், விழுகிறது. அதற்கு என்னவாம்....'' இளம் கணித வியலாளருக்குத் திடுமெனத் தொண்டை அடைத்துவிட்டது. முகத்தில் பீதியின் குறி தெரிய எழுந்து சன்னலருகே ஓடினர்.

''மெய்தான்'' என்ரூர் அழாக்குரலில். ''பந்தயத்தை இழந்து விட்டேன். எனது மிதிவண்டியைப் பறிகொடுத்து விட்டேன்.''

பிறகு கண நேரத்துக்கெல்லாம் வெளியே படையாட்களது பட்டாளம் ஒன்று எங்கள் சன்னலைக் கடந்து செல்வதைக் கண்ணுற்ரேம்!

59. நம்மைச் சுற்றிலும் நம்முள்ளும் இருக்கும் அசுர எண்கள்.—

அசுர எண்களைத் தேடி நாம் எங்கெங்கோ அலைய வேண்டியதில்லை. நம்மைச் சுற்றிலும், நம்முள்ளுங்கூட இவை நிறைய இருக்கின்றன. இவற்றை நாம் இனங் கண்டு கொள்ளத் தெரிந்து கொள்வோமாயின் இவை எங்கும் இருப்பதை நாம் காணலாம். தலைக்கு மேலிருக்கும் வானம், காலுக்குஅடியிலுள்ள மணல், நம்மைச் சுற்றிலுமுள்ள காற்று, நமது உடலில் ஓடும் இரத்தம்—இவை யாவற்றிலும் அசுர எண்கள் ஒளிந்து கொண்டிருக்கின்றன.

விண்வெளியில் அசுர எண்கள் நிறைய காணக் கிடப்பது மிகப் பெரும்பாலோருக்கு விந்தையாய்த் தோன்றுவதில்லை. விண்ணிலுள்ள விண்மீன்களின் எண்ணிக்கை, ஒன்றிலிருந்து ஒன்றுக்கும் பூமியிலிருந்து இவற்றுக்குமுள்ள தொலைவு, இவற்றின் பருமன், எடை, ஆயுட் காலம் ஆகிய ஒவ்வொன்றிலும் நமது கற்பனைக்கு எட்டாத எண்களை ஓயாமல் நாம் எதிர்படுகின்றோம். காரணமின்றி "வானியல் எண்" என்கிற தொடர் கையாளப்படவில்லை. ஆனால் வானியலாளர்கள் "சிறியனவாய்க்" குறிப்பிடும் சில விண் கோள்களுங்கூட மனிதனது கண் நோக்கிலிருந்து அணுகும் போது உண்மையில் பூதாகரமானவை என்பதைச் சிலர் உணர்வதாய்த் தெரியவில்லை. ஒரு சில கிலோமீட்டர் விட்டமே கொண்ட சில கிரகங்கள் நமது சூரிய மண்டலத்தில் இருக்கின்றன, அசுர எண்களுடன் சகவாசம் புரிவோராகிய வானியலாளர்கள் இவற்றை "இம்மியளவான" கோள்களாய்க் குறிப்பிடுகிறார்கள். ஆனால் இவை பிரம்மாண்டமான பிற விண் கோள்களுடன் ஒப்பிடுகையில்தான் இம்மியளவானவை, நம்முடைய கண் நோக்கிலிருந்து கவனிக்கையில் இவை ஒன்றும் சிறியவை அல்ல. எடுத்துக் காட்டாய், அண்மையில் கண்டு பிடிக்கப்பட்ட மூன்றே கிலோமீட்டர் விட்டம் கொண்ட கிரகத்தைக் குறிப்பிடலாம். வடிவகணிதத்தைக் கொண்டு இதன் மேற் பரப்பின் அளவு 28 சதுர கிலோமீட்டர், அல்லது 2,80,00,000 சதுர மீட்டர் என்று கணக்கிடுவது கடினமல்ல. நேரே நிற்கும் ஏழு பேருக்கு ஒரு சதுர மீட்டர் பரப்பு போதும். ஆகவே, "இம்மியளவே" ஆன இந்தக் கிரகத்தின் மேற் பரப்பில் 19,60,00,000 பேருக்குப் போதுமான இடம் இருக்கிறது!

நாம் மிதித்துச் செல்லும் மணலும் நம்மை அசுர எண்களது உலகுக்கு இட்டுச் செல்கிறது. "கடற்கரையிலுள்ள மணற் பொடிகள் போல் எண்ணிறந்தவை" என்று அடிக்கடி சொல்வதுண்டு, இந்த உபமானம் காரணமின்றி உருவாகி விடவில்லை. இடைக்குறிப்பாய் இங்கு நாம் இன்னொன்றையும் குறிப்பிடலாம்: பண்டைக் காலத்தோர் மணற் பொடிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறைத்து மதிப்பிட்டு விட்டார்கள், வானத்திலுள்ள விண்மீன்கள் எத்தனையோ அத்தனைதான் இவற்றின் எண்ணிக்கை என்று அவர்கள் நினைத்து வந்தார்கள். தொலைநோக்கிகள் இல்லாத அந்தக் காலத்தில் விண்

ணின் ஓர் அரைக்கோளத்தில் சுமார் 3,500 விண்மீன்களே கண்ணுக்குத் தெரிந்தன. வெறுங் கண்ணால் காணக் கூடிய விண்மீன்களின் எண்ணிக்கை போல் பத்துலட்சக் கணக்கான மடங்கு கூடுதலான மணற் பொடிகள் கடற்கரையில் இருக்கின்றன.

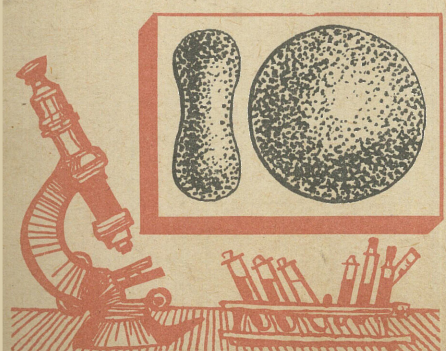
நாம் சுவாசிக்கும் காற்றிலுங்கூட ஒரு பெரிய எண் ஒளிந்து கொண்டிருக்கிறது. இந்த காற்றில் ஒவ்வொரு கன சென்டிமீட்டரிலும்—விரற் சிமிழில் அடங்கும் இதில்—2,70,000,00,00,000,00,00,000 மூலக்கூறுகள் இருக்கின்றன.

கற்பனைக்கு எட்டாத அளவுக்குப் பெரிதாகும் இந்த எண். நமது பூமியில் இத்தனை பேருக்கு இடம் இருக்காது. எல்லாக் கண்டங்களையும் மாகடல்களையும் சேர்த்து நமது பூமியின் மேற் பரப்பு 50 கோடி சதுர கிலோமீட்டர்தான். இதைச் சதுர மீட்டராய் மாற்றுவோமாயின், நமக்குக் கிடைப்பது

5,00,00,000,00,00,000 சதுர மீட்டர்.

இந்த எண்ணால் 2,70,000,00,00,000,00,00,000ஐ வகுப்போமாயின், நமக்குக் கிடைக்கும் ஈவு 54,000. ஆகவே ஒவ்வொரு சதுர மீட்டர் புவிப்பரப்பிலும் 50,000க்கும் அதிகமானோர் இருந்தாக வேண்டும்!

ஒவ்வொரு மனிதனும் தன்னுள் ஓடும் இரத்தத்தில் ஓர் அசுர எண்ணை வைத்திருப்பதாய்க் கூறினோம்: ஒரு சொட்டு இரத்தத்தைப் பெருக்காடியில் பரிசீலிப்போமாயின், அதில் சிவப்பு அணுக்கள் ஏராளமாய் இருக்கக் காண்போம். இந்த அணுக்கள் மையத்தில் தட்டையாய் அமைந்த வில்லைகளைப் போல் (படம் 58) தோற்றமளிக்கின்றன. இவை யாவும் ஏறத்தாழ ஒரே பருமனுடையவை—விட்டம் 0.007 மில்லிமீட்டர், தடிமன் 0.002 மில்லிமீட்டர். இம்மாதிரியானவை நமது இரத்தத்தில் எத்தனை இருக்கின்றன, தெரியுமா?—சுமார் 1 கன மில்லிமீட்டருள்ள ஒரு சிறு துளி இரத்தத்தில்



படம் 58. சிவப்பு இரத்தவணு.

50,00,000 இருக்கின்றன. மனிதனது இரத்தம் அனைத்திலும் இருப்பவை எத்தனை? ஓர் ஆளின் எடை எத்தனை கிலோகிராமோ அந்த எண்ணைப் போல் 14 மடங்கு குறைவான லிட்டர் இரத்தம் அவன் உடலில் ஓடுகிறது. எடுத்துக்காட்டாய், அவன் எடை 40 கிலோகிராம் என்றால், அவனுளிருக்கும் இரத்தம் சுமார் 3 லிட்டராகும் (அதாவது, 30,00,000 கன மில்லிமீட்டராகும்). ஆகவே பெருக்கல் கணக்கு போடுவோமாயின்,

$$50{,}00{,}000 \times 30{,}00{,}000 = 15{,}00{,}000{,}00{,}00{,}000$$

சிவப்பு அணுக்கள் அவனுள் இருப்பது தெரியவரும்.

15,00,000, கோடி சிவப்பு அணுக்கள்! எவ்வளவு ஏராளமாய் இருக்கின்றன என்பதைச் சிந்தித்துப் பாருங்கள்! இந்தச் சிவப்பு அணுக்களை ஒரு சங்கிலியாய்க் கோத்தோமானல், அதன் நீளம் எவ்வளவு இருக்கும்? இதைக் கணக்கிடுவது கடினமல்ல. 1,05,000 கிலோமீட்டர் நீளம் இருக்கும், நமது பூமியின் நடுவரை வழியே எடுத்துச் சென்றால் இந்தச் சங்கிலி நமது பூமியை

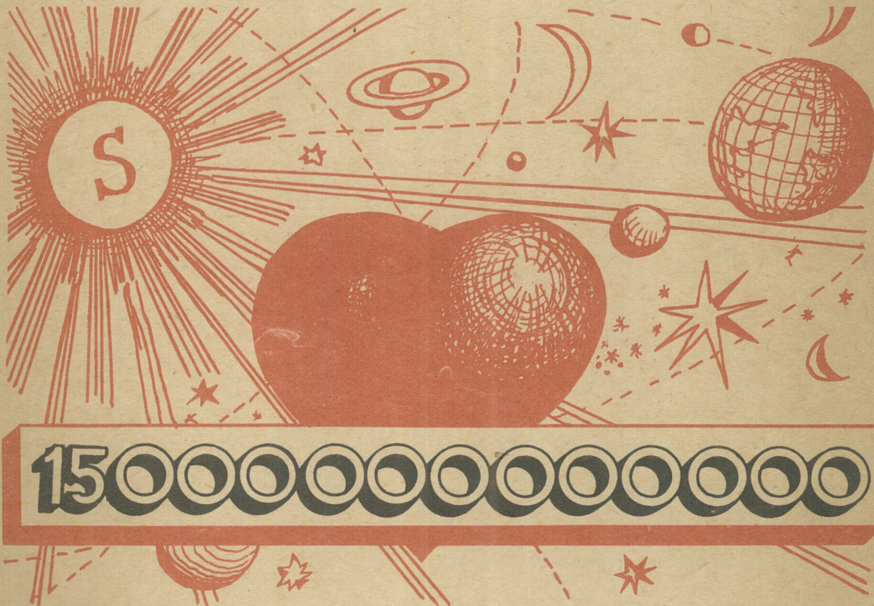
$$1{,}00{,}000 \div 40{,}000 = 2.5 \text{ தடவை}$$

சுற்றி வருவதற்குப் போதிய நீளமுடையதாய் இருக்கும்.

சராசரி எடையுடைய ஒரு மனிதனை எடுத்துக் கொண்டால் இந்தச் சிவப்பு அணுச் சங்கிலி நமது பூமியை இவ்விதம் மூன்று தடவை சுற்றி வரப் போதிய நீளமுடையதாய் இருக்கும்.

இந்தச் சிவப்பு அணுக்களின் நுண்ணிய அளவு நமது உடலமைப்பினுள் முக்கியமான பணி ஆற்றுகிறது. உடலின் எல்லாப் பகுதிகளுக்கும் இவை உயிர் வாயுவை எடுத்துச் செல்கின்றன. நுரையீரல்களுக்குள் இரத்தம் செல்லுகையில் இவை உயிர் வாயுவைக் கிரகித்து, பிறகு இரத்தவோட்டம் இவற்றை நமது உடலின் திசுக்களுக்குள் செலுத்தும் போது, நுரையீரல்களிடமிருந்து நெடுந் தொலைவிலுள்ள உடற் பகுதிகளுக்கு எல்லாம் சென்று உயிர் வாயுவை வெளிவிடுகின்றன. எவ்வளவுக்கு எவ்வளவு இந்த அணுக்கள் சிறிதாகவும் ஏராளமாகவும் இருக்கின்றனவோ, அவ்வளவுக்கு அவ்வளவு தமக்குரிய பணியினை இவை செவ்வனே செய்ய முடிகிறது; ஏனெனில் அப்போது இவற்றின் மொத்த மேற்பரப்பு அதிக

மாகிவிடுகிறது, இவை தமது மேற் பரப்பின் மூலம் தான் உயிர் வாயுவைக் கிரகித்து எடுத்துச் சென்று வெளிவிடுகின் றன. இவற்றின் மொத்த மேற் பரப்பு மனிதனது உடலின் மேற் பரப்பை விட பன்மடங்கு அதிகம் என்பதைக் கணக்கீடு கள் காட்டுகின்றன. இவற்றின் மொத்த மேற் பரப்பு 1,200



படம் 59. பூமியை மைய வரை வழியே மூன்று தரம் சுற்றி வரப்போதுமான நீளமுடையது.

சதுர மீட்டராகும்—40 மீட்டர் நீளமும் 30 மீட்டர் அகலமும் கொண்ட ஒரு தோட்டத்தின் பரப்புக்கு இது சமமாகும்.

ஆகவே இந்தச் சிவப்பு அணுக்கள் கூடுமான அளவுக்கு எண்ணிக்கையில் அதிகமாய் இருப்பது உயிரமைப்புக்கு எவ்வளவு முக்கியம் என்பது புரிகிறது—நமது உடலின் மேற் பரப்பைக் காட்டிலும் 1,000 மடங்கு கூடுதலான மேற்பரப்பின் மூலம் இவை உயிர் வாயுவைக் கிரகித்துச் சென்று வெளிவிடுகின்றன.

மற்றுமோர் அசுர எண்: ஓர் ஆள் தனது ஆயுட் காலத்தில் (சராசரி மனிதன் 70 ஆண்டு வாழ்வதாய்க் கொள்கிறோம்)

உட்கொள்ளும் உணவின் மொத்த அளவு பிரமிக்கத்தக்க தாகும். மனிதன் தனது ஆயுட் காலத்தில் உட்கொள்ளும் டன் கணக்கான நீரையும் ரொட்டியையும் இறைச்சியையும் மீனையும் மற்றும் காய்கறிகள், முட்டை, பால் முதலான பலவற்றையும் எடுத்துச் செல்ல ஒரு பெரிய சரக்கு ரயில் வண்டியே வேண்டியிருக்கும்.

7

அளவுகோலின்றி அளவிடுதல்

60. காலடியால் தொலேவைக் கணக்கிடலாம்.—

கையில் எந்நேரமும் நாம் அளவுகோல் வைத்திருப்ப தில்லே, ஆகவே அளவுகோலின்றிக் குத்து மதிப்பாகவேனும் தொலேவை அளவிடத் தெரிந்து வைத்திருப்பது நல்லது.

நடைப் பயணம் போவது போன்ற சந்தர்ப்பங்களில் தொலேவை அளவிடுவதற்கு எடுத்து வைக்கும் காலடிகளேக் கொண்டு கணக்கிடுவதுதான் சுலபமான வழி. நீங்கள் எடுத்து வைக்கும் காலடிகள் எப்போதும் ஒரே அளவுடையவை அல்ல என்பது மெய்தான். ஆயினும் பொதுவாய் அவற்றின் அளவு ஏறத்தாழ வித்தியாசமின்றி சமமாகவே இருக்கிறது. இந்த அளவு தெரியுமானுல் எந்தத் தொலேவையும் அளவு கோலின்றியே நீங்கள் கணக்கிட்டுச் சொல்லலாம்.

முதலில் உங்களுடைய சராசரிக் காலடியை அளந்து கணக்கிட்டுக் கொள்ள வேண்டும். அளவுகோலின்றி இதைச் செய்ய முடியாது.

அளவு நாடாவை வைத்து 20 மீட்டர் தொலேவு அளந்து குறித்துக் கொள்ளுங்கள். பிறகு நாடாவை எடுத்துவிட்டு நீங்கள் அந்தத் தொலேவு நடப்பதற்கு எடுத்து வைக்கும் காலடிகள் எத்தனே என்று எண்ணிக் கணக்கிடுங்கள். Xஉம் ஒரு பின்னமும் சேர்ந்ததாய் விடை கிடைக்கலாம். இந்தப் பின்னம் அரைக்குக் குறைவானதாய் இருப்பின் இதைக் கவனியாது விட்டுவிடலாம்; அரைக்கு அதிகமாய் இருப்பின் இதை ஒன்றெனக் கொண்டு சேர்த்துக் கூட்டிக் கொள்ள வேண்டும். இப்படிப் பெறப்படும் காலடிகளது எண்ணிக்கை யால் 20 மீட்டரை வகுத்து வரும் ஈவுதான் சராசரிக் காலடி ஒன்றின் அளவாகும். இந்தச் சராசரி அளவை மனனம் செய்து நினேவில் இருத்திக் கொள்ளுங்கள்.

காலடிகளே எண்ணிச் செல்கையில் தவறிழைக்காமல் இருக்கும் பொருட்டு—நெடுந் தொலேவினே அளக்க நேரும் போது அடிக்கடி இப்படி தவறு ஏற்படக் கூடும்—பத்துவரை எண்ணியதும் உங்கள் இடக்கையில் ஒரு விரலே மடக்கிக் கொள்வது நன்று. ஐந்து விரல்களும் மடக்கப்பட்டதும், அதாவது 50 காலடிகள் நடந்து சென்றதும், வலக்கையில் ஒரு விரலே மடக்கிக் கொள்ளுங்கள். நீங்கள் இவ்வாறு 250 வரை எண்ணிச் செல்ல முடியும். அதன் பிறகு ஆதியிலிருந்து திரும்பவும் ஆரம்பித்து எண்ண வேண்டும். ஆனல் வலக்கை

விரல்களை மொத்தம் எத்தனை தரம் மடக்கினீர்கள் என்பதை மறந்துவிடக்கூடாது. உதாரணமாய், சென்றடையவேண்டிய இலக்கை அடைவதற்குள் நீங்கள் வலக்கையின் எல்லா விரல்களையும் இரண்டு தரம் மடக்கியதாகவும், அதன் பின் வலக்கையில் மூன்று விரல்களையும் இடக்கையில் நான்கு விரல்களையும் மடக்கி வைத்திருப்பதாகவும் கொள்வோமாயின், நீங்கள் நடந்த காலடிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை

$$2 \times 250 + (3 \times 50) + (4 \times 10) = 690.$$

கடைசியாய் இடக்கை விரலை மடக்கிய பின் நீங்கள் மேலும் சில காலடிகள் நடந்திருந்தால், மொத்த எண்ணிக்கையுடன் இவற்றையும் கூட்டிக் கொள்ள வேண்டும் என்பதைக் கூறத் தேவையில்லை.

பழைய விதி ஒன்றை இங்கே குறிப்பிடலாம்: முழு ஆள் ஒருவரின் சராசரிக் காலடியின் நீளம் அவரது கண்ணிலிருந்து காலின் கட்டை விரலுக்குள்ள தூரத்தில் பாதியாகும்.

இன்னொரு பழைய விதி நடையின் வேகத்தைப் பற்றியது; மூன்று விநாடிகளில் ஒருவர் எத்தனைக் காலடி எடுத்து வைத்துச் செல்கிறாரோ, அத்தனை கிலோமீட்டர் அவர் ஒரு மணி நேரத்தில் நடக்கிறார். ஆனால் இந்த விதி குறிப்பிட்ட காலடி அளவுள்ள நடைக்குத்தான்—நீண்ட காலடி வைத்து நடப்பவருக்குத்தான்—பொருந்தும். காலடியின் நீளம் x மீட்டராகவும், மூன்று விநாடிகளில் எடுத்து வைக்கப்படும் காலடிகளின் எண்ணிக்கை n ஆகவும் இருப்பின், மூன்று விநாடிகளில் இம்மனிதர் nx மீட்டரும், ஒரு மணி நேரத்தில் (3,600 விநாடிகளில்) 1,200 nx மீட்டரும் (அதாவது 1.2 nx கிலோமீட்டரும்) நடப்பார். இந்தத் தொலைவு அவர் 3 விநாடிகளில் எடுத்து வைக்கும் காலடிகளது எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக வேண்டுமாயின், பின்வரும் சமன்பாடு கிடைத்தாக வேண்டும்: $1.2\,nx = n$,

அல்லது $1.2x = 1$, அதாவது $x = 0.83$ மீட்டர்.

ஒருவரது காலடியின் நீளம் அவரது உயரத்தைச் சார்ந்ததென்ற முதலாவது விதி சரியானதே; இப்போது நாம் பரிசீலித்த இரண்டாவது விதி சராசரி உயரமுள்ளவருக்கு மட்டுமே, அதாவது சுமார் 1.75 மீட்டர் உயரமுள்ளவருக்கு மட்டுமே பொருந்துவதாகும்.

61. உயிருள்ள அளவுகோல்.—

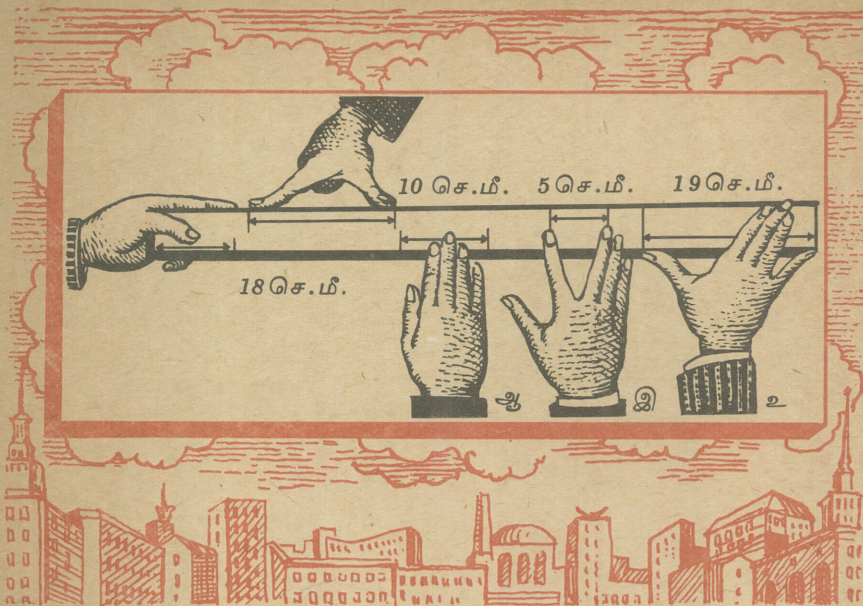
அளவுகோல்கள் இல்லாத போது சராசரி அளவுள்ள பொருள்களை அளப்பதற்கு பின்வரும் முறை ஒரு சிறந்த உபாயமாகும். நீட்டிய கையின் விரல் நுனியிலிருந்து எதிர்ப் பக்கத்துத் தோளுக்கு ஒரு நூலையோ, கோலையோ வையுங் கள் (படம் 60). முழு ஆள் ஒருவருக்கு இந்தத் தூரம் சுமார்

படம் 60. நீட்டிய கரத்தின் விரல் நுனியிலிருந்து எதிர்ப் பக்கத்துத் தோள் வரையில் சுமார் ஒரு மீட்டர்.

ஒரு மீட்டர் நீளமுடையதாய் இருக்கும். குத்துமதிப்பாய் ஒரு மீட்டர் நீளம் அளப்பதற்கு இன்னொரு வழி சாண் முறையாகும்: ஆள்காட்டி விரலையும் கட்டை விரலையும் சாத்தியமான முழு அளவுக்கு நீட்டி வைத்தால் இரு நுனிகளுக்கும் இடையிலுள்ள தூரம் (ஒரு சாண்) சுமார் 18 சென்டிமீட்டராகும் (படம் 61-அ) இம்மாதிரி ஆறு சாண்கள் அளந்தால் அது குத்துமதிப்பாய் 1 மீட்டர் நீளமாகும்.

இவ்விதம் நாம் நமது கைகளைக் கொண்டே நீளங்களை அளக்க முடியும். இதற்கு அவரவரும் தமது கையின் அளவைத் தெரிந்து நினைவில் வைத்திருப்பது அவசியமாகும்.

முதலில் நாம் நமது கையின் அகலத்தை அளந்து வைத்துக் கொள்ள வேண்டும், படம் 61—ஆ இதைக் காட்டுகிறது. முழு ஆள் ஒருவரது கையின் அகலம் சாதாரணமாய் 10



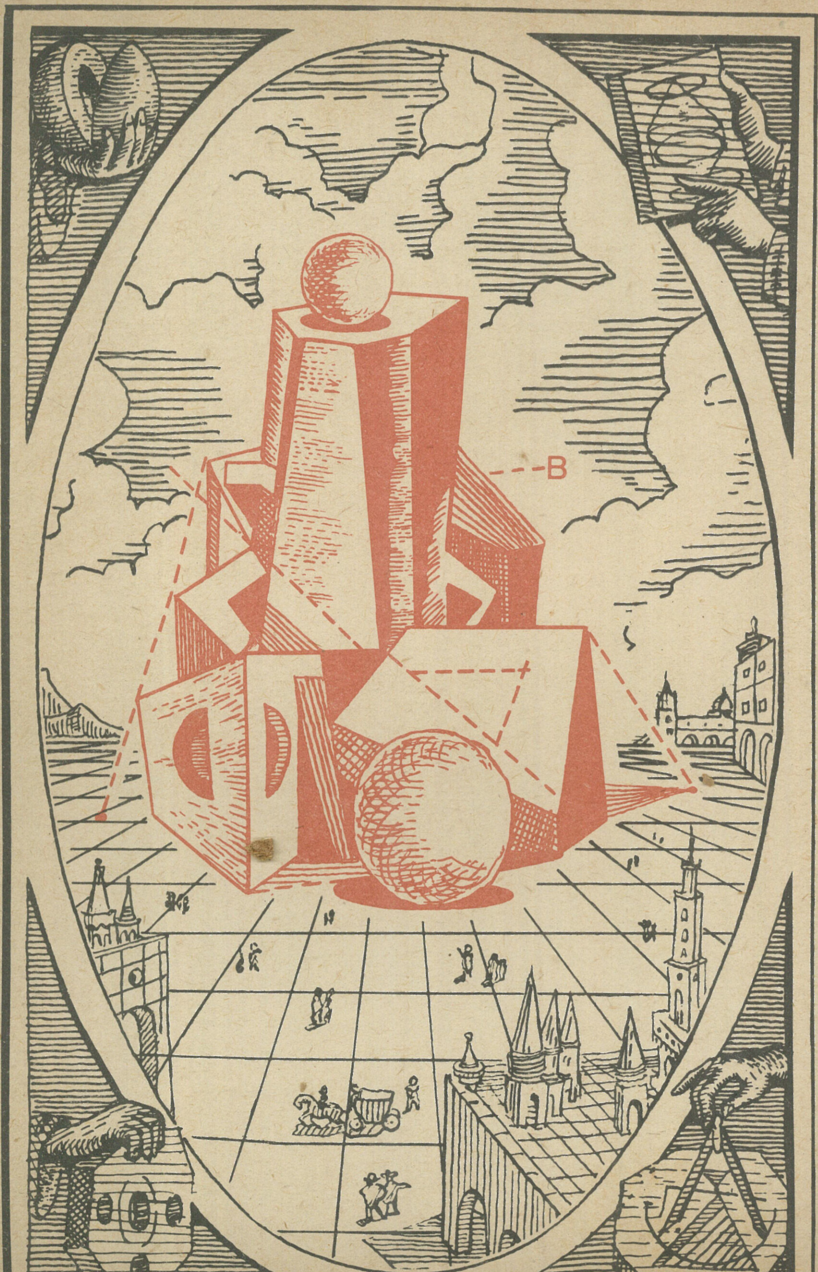
படம் 61. கையைக் கொண்டு அளந்து கணக்கிடலாம்.

சென்டிமீட்டர் இருக்கும். உங்களுடைய கையின் அகலம் இன்னும் சற்று அதிகமாகவோ, குறைவாகவோ இருக்கலாம், அது எவ்வளவு இருக்கிறது என்று நீங்கள் அளந்து நினைவில் வைத்துக் கொள்ள வேண்டும். பிறகு ஆள்காட்டி விரலையும் நடுவிரலையும் கூடுமான அளவுக்கு விரித்து விலக்கி வைத்திருக்கையில் (படம் 61—இ) அவற்றின் நுனிகளுக்கு இடையிலுள்ள தூரத்தைத் தெரிந்துவைத்திருக்க வேண்டும். கட்டை விரலின் அடியிலிருந்து ஆள்காட்டி விரலின் நுனிக்குள்ள நீளத்தை(படம் 61—ஈ) தெரிந்து வைத்திருப்பது பயனுடையதாகும். முடிவில் விரித்து விலக்கி வைக்கப்பட்ட கட்டை விரல் நுனிக்கும் சிறு விரல் நுனிக்கும் இடையிலுள்ள தூரத்தை (படம் 61—உ) அளந்து தெரிந்து கொள்ளுங்கள்.

உயிருள்ள இந்த அளவுகோல்களை உபயோகித்து சிறு பொருள்களின் குத்து மதிப்பான அளவுகளை அளந்து தெரிந்து கொண்டுவிடலாம்.

8

வடிவ கணிதப் புதிர்கள்


B

இந்த அத்தியாயத்தில் இருக்கும் புதிர்களுக்கு விடை கூற உங்களுக்கு வடிவகணிதம் நன்ருய்த் தெரிந்திருக்க வேண்டும் என்பதில்லை. கணிதத்தின் இப்பிரிவில் ஆரம்ப அறிவு இருக்கும் எவராலும் இந்தப் புதிர்களுக்கு விடை கூற முடியும். வாசகர் தாம் நினைப்பது போல் மெய்யாகவே வடிவகணிதத்தை தெரிந்து வைத்திருக்கிருரா என்பதைச் சோதித்துப் பார்த்துக் கொள்ள இங்குள்ள உத்திக் கணக்குகள் உதவியாய் இருக்கும். வடிவகணித உருவங்களின் குணு திசயங்களை விவரிக்கத் தெரிந்திருந்தால் மட்டும் போதாது, அது அறிவாகிவிட முடியாது. இந்தக் குணுதிசயங்களைப் பயன்படுத்தி நடைமுறைப் பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வு காண்பது எப்படி என்பது தெரிந்திருப்பது தான் மெய்யான அறிவாகும். சுடத் தெரியாத ஒருவரிடம் துப்பாக்கி இருப்பதால் பயன் இல்லை அல்லவா?

படம் 62. பின்பக்கத்து அச்சைவிட முன் பக்கத்து அச்சு சீக்கிரமாய்த் தேயக் காரணம் என்ன?

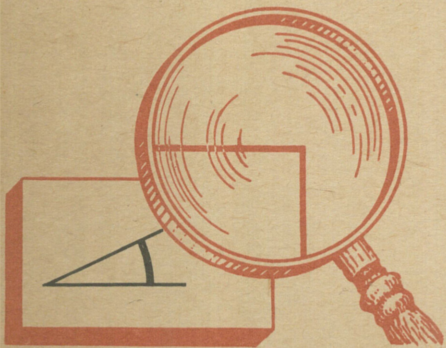
24 குண்டுகளை வைத்துக் கொண்டு இங்குள்ள வடிவகணித இலக்குகளில் குறி தவருது எத்தனை இலக்குகளைச் சுட்டு மதிப்பெண்கள் பெற முடிகிறது என்று வாசகர் தம்மைத் தாமே பரீட்சித்துப் பார்த்துக் கொள்ளட்டும்.

62. வண்டி.—

வண்டியின் முன்பக்கத்து அச்சு பின்பக்கத்து அச்சைவிட சீக்கிரமாய்த் தேய்வது ஏன்?

63. பூதக் கண்ணுடியின் மூலம்.—

$1^1/_2{}^\circ$ உள்ள கோணத்தை, எதையும் நான்கு மடங்கு பெரிதாக்கிக் காட்டும் பூதக் கண்ணுடி மூலம் பார்த்தால் (படம் 63) அந்தக் கோணம் எவ்வளவு பெரிதாய்த் தெரியும்?



படம் 63. கோணம் எவ்வளவு பெரிதாய்த் தெரியும்?

64. ரசமட்டம்.—

நடுவில் ஒரு காற்றுக் கொப்புளத்தை (படம் 64) கொண்ட கண்ணுடிக் குழாயாலான ரசமட்டத்தை நீங்கள் பார்த்திருப்பீர்கள். சாய்வுத் தளத்தில் வைத்ததும் இந்தக் கொப்புளம் நடுக் குறியிலிருந்து விலகிவிடுகிறது. சாய்வுக் கோணம் பெரிதாக ஆக மேலும் மேலும் அதிகமாய் இந்தக் கொப்புளம் நடுக் குறியிலிருந்து விலகுகிறது. குழாயிலுள்ள திரவத்தை விட இலேசாய் இருக்கும் இந்தக் கொப்புளம் திரவத்தின்மேல் மட்டத்துக்கு உயர்வதால்தான் இப்படி அது நகர்ந்து செல்கிறது. இந்தக் குழாய் வளைவின்றி நேராய் இருக்குமாயின், சற்றே சாய்த்ததும் கொப்புளம் குழாயின் மேல் நுனிக்கு, அதாவது அதன் உச்சிக்கு நகர்ந்து ஓடிவிடும். இம்மாதிரியான ரசமட்டம் மிக மிக வசதி குறைவானது என்பது கூறுமலே விளங்கும். எனவேதான் இந்தக் குழாய் படம் 64ல் காட்டப் பட்டிருப்பது போல் வழக்கமாய் வில் வடிவில் வளைக்கப்பட்டிருக்கிறது. ரசமட்டம் கிடை மட்டத்தில் வைக்கப்

படம் 64. ரசமட்டம்.

பட்டதும் குழாயின் உச்சப் புள்ளியாகிய கொப்புளம் நடுக் குறியுடன் ஒன்றியிருக்கிறது. மட்டம் சாய்க்கப்பட்டதும் கொப்புளம் நடுக் குறியில் இல்லாமல் அக்கம் பக்கத்துப் புள்ளிக்கு நகர்ந்துவிடுகிறது.*

கேள்வி என்னவென்றால், குழாயின் வளைவினுடைய ஆரம் 1 மீட்டர் எனில், ரசமட்டம் $1/2^{\circ}$ சாய்க்கப் பட்டதும் கொப்புளம் நடுக் குறியிலிருந்து எத்தனை மில்லி மீட்டர் நகர்ந்து செல்லும்?

65. எத்தனைப் பட்டைமுனைகள்?—

இந்தக் கேள்வி அளவு மீறி சிறுபிள்ளைத்தனமாகவோ, தந்திரமானதாகவோ தோன்றக் கூடும்.

அறுகோண வடிவமுள்ள ஒரு பென்சிலில் எத்தனை பட்டைமுனைகள்?

விடையைப் புரட்டிப் பார்க்குமுன் நன்றாய் ஆலோசி யுங்கள்.

66. பிறை.—

ஒரு பிறையில் (படம் 65) இரண்டே இரண்டு நேர் கோடுகளிட்டு உங்களால் அதை ஆறு பாகங்களாய்ப் பிரிக்க முடியுமா?

67. தீக்குச்சி வித்தை.—

12 தீக்குச்சிகளைக் கொண்டு ஒரு சிலுவையின் வடிவத்தை அமைக்க முடியும் (படம் 66). இதன் பரப்பளவு ஐந்து ''தீக்குச்சி'' சதுரங்களுக்குச் சமமாய் இருக்கும்.

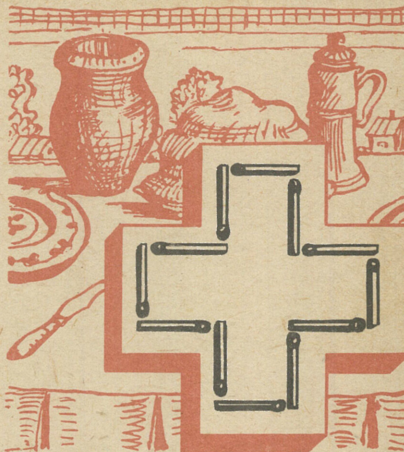
குச்சிகளைத் திருத்தியமைத்து நான்கு ''தீக்குச்சி'' சது ரங்களுக்குச் சமமான பரப்பளவுள்ள வடிவமாக்க முடி யுமா?

அளவைக் கருவிகளை உபயோகிக்கக் கூடாது.

---

* ''கொப்புளத்திலிருந்து நடுக் குறி நகர்ந்துவிடுகிறது'' என்று சொல்வதே மிகவும் பொருந்தமாயிருக்கும், ஏனென் றால் கொப்புளம் உண்மையில் அதன் இடத்தை விட்டு அசை யாமல் அப்படியே இருக்க, குழாயும் அதன் நடுக் குறியும் நகர்ந்து விடுகின்றன.

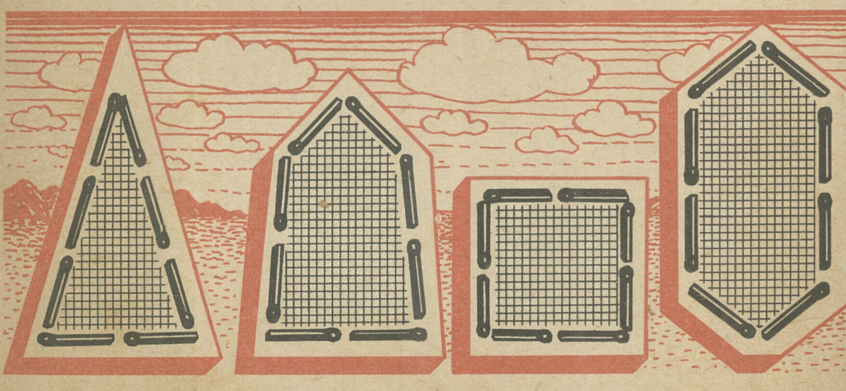
படம் 65. பிறை.



படம் 66. பன்னிரண்டு தீக்குச்சிகளால் ஆகிய சிலுவை.

68. இன்னொரு தீக்குச்சி வித்தை.—

எட்டுத் தீக்குச்சிகளைக் கொண்டு பல விதமான வடிவங்களையும் அமைக்கலாம். இவற்றில் சில படம் 67ல் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. இவை யாவும் வெவ்வேறு பரப்பளவுகள்



படம் 67. எட்டுத் தீக்குச்சிகளைக் கொண்டு சாத்தியமான மிகப் பெரிய வடிவ்த்தை எப்படி அமைக்கலாம்.

கொண்டவை. இந்த எட்டுக் குச்சிகளைக் கொண்டு சாத்தியமான மிகப் பெரிய வடிவத்தை அமைத்துக் காடடுங்கள்.

69. ஈயின் வழி.— நீள் உருளைக் கண்ணாடிக் கலனின் உட்புறத்தில் உச்சி வட்டத் தளத்திலிருந்து மூன்று சென்டிமீட்டர் கீழே ஒரு துளி தேன் இருக்கிறது. வெளிப்புறத்தில் தேன் துளிக்கு நேர் எதிர்ப் பக்கத்தில் ஓர் ஈ இருக்கிறது (படம் 68).

படம் 68. ஈ தேனை அடையக்குறுக்கு வழி எது?

தேன் துளியை அடைய ஈக்குச் சுருக்கு வழியைக் காட்டுங்கள்.

நீள் உருளையின் விட்டம் 10 சென்டிமீட்டர், உயரம் 20 சென்டிமீட்டர்.

இந்தச் சுருக்கு வழியை ஈயே கண்டுபிடித்துக் காட்டி விடும் என்று எதிர்பார்க்க வேண்டாம். இதைக்கண்டுபிடிக்க வடிவகணித அறிவு அவசியம், ஈயின் சக்திக்கு அப்பாற்பட்டது இது.

70. தக்கை தயாரியுங்கள்.—

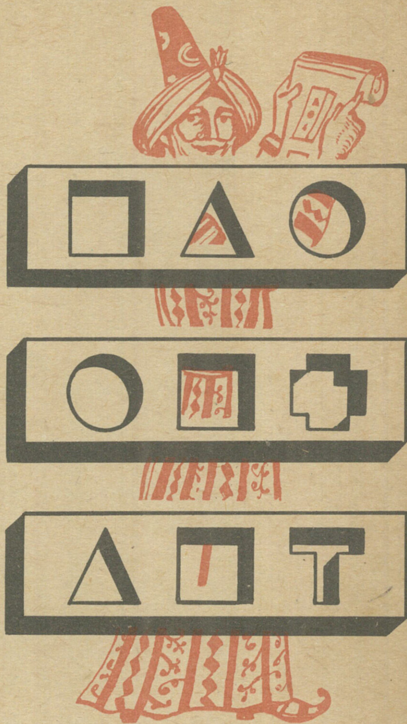
ஒன்று சதுரமாகவும், மற்றொன்று முக்கோணமாகவும், இன்னொன்று வட்டமாகவும் அமைந்த மூன்று துளைகளைக் கொண்ட ஒரு மரச் சட்டம் (படம் 69) உங்களிடம் தரப்படுகிறது. இந்த மூன்று துளைகளுக்கும் ஏற்றதாய் ஒரே தக்கையைத் தயாரிக்க முடியுமா?

71. இரண்டாவது தக்கை.—

முந்திய கணக்குக்கு விடை கண்டு விட்டீர்களாயின், படம் 70ல் காட்டப்படும் மூன்று துளைகளுக்கும் பொருத்தமான தக்கையைக் கண்டுபிடித்துக் கூறுங்கள்.

72. மூன்றுவது தக்கை.—

இதே வகையிலான இன்னொரு உத்திக் கணக்கு. படம் 71ல் காட்டப்படும் மூன்று துளைகளுக்கும் ஒருங்கே பொருந்தும்படியான தக்கை ஒன்று கண்டுபிடியுங்கள்.



படம் 69. மூன்று துளைகளுக்கும் ஏற்ற தக்கை எது?

படம் 70. மூன்று துளைகளுக்கும் பொருத்தமான தக்கை ஒன்று இருக்கிறதா?

படம் 71. இந்த மூன்று துளைகளுக்கும் பொருந்தும் படி ஒரு தக்கை தயாரிக்க முடியுமா?

73. காசு வித்தை.—

இரு காசுகளை (5 கோப்பெக், 2 கோப்பெக் காசுகளையோ, 18, 25 மில்லிமீட்டர் விட்டங்களையுடைய இவற்றை ஒத்த வேறு இரு காசுகளையோ) எடுத்துக் கொள்ளுங்கள். பிறகு ஒரு காகிதத்தில் 2-கோப்பெக் காசின் சுற்றளவுக்குச் சமமான ஒரு வட்டத்தைக் கத்தரியுங்கள்.

இந்த ஓட்டையினுள் 5-கோப்பெக் காசு போக முடியுமென நினைக்கிறீர்களா?

இதில் சூழ்ச்சி ஏதும் இல்லை, மெய்யான வடிவகணித உத்திக் கேள்வி இது.

74. **கோபுரத்தின் உயரம்.—**

உங்கள் ஊரில் மிகவும் உயரமான ஒரு கோபுரம் இருக்கிறது, ஆனல் அதன் உயரம் எவ்வளவு என்று உங்களுக்குத் தெரியாது. அதன் புகைப்படம் ஒன்று உங்களிடம் இருக்கிறது. கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கண்டுபிடிக்க இந்தப் புகைப்படம் உங்களுக்கு உதவி புரியுமா?

75. **வடிவொத்தவை.—**

படம் 72. இந்த இரு முக் கோணங்களும் வடிவொத்தவையா?

வடிவகணிதத்தில் வடிவொத்த உருவங்களது இயல்புகளைப் புரிந்து கொண்டவர்களைப் பின் வரும் இரு கேள்விகளுக்கும் விடை கூறும்படிக் கேட்கிறோம்:

1) படம் 72ல் காட்டப்படும் இரு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவையா?

2) படம் 73ல் காட்டப்படும் படச் சட்டத்தின் உட்புறத்திலும் வெளிப்புறத்திலுமுள்ள செவ்வகங்கள் வடிவொத்தவையா?

76. **கம்பியின் நிழல்.—**

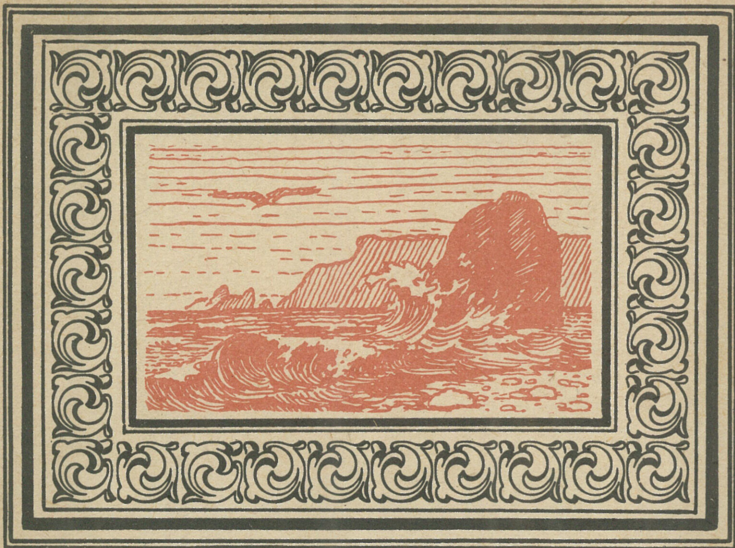
4 மில்லிமீட்டர் விட்டமுள்ள ஒரு கம்பியின் நிறை நிழல் வெயில் வீசும் நாளன்று அக்கம்பியிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்துக்கு விழக்கூடியது?

77. **கல்.—**

முறையான கட்டடக் கல்லின் எடை 4கிலோகிராம். இதே பொருளில் இதைக் காட்டிலும் நான்கு மடங்கு சிறியதாகவும், இதற்கு வடிவொத்ததாகவும் அமைந்த விளையாட்டுக் கல்லின் எடை எவ்வளவு இருக்கும்?

78. **நெட்டையனும் குள்ளனும்.—**

2 மீட்டர் உயரமுள்ள நெட்டையன் 1 மீட்டர் உயரமுள்ள குள்ளனை விடவும் எவ்வளவு எடையுடையவனுய் இருப்பான்?



படம் 73. உட்புறத்திலும் வெளிப் புறத்திலுமுள்ள செவ்வகங்கள் வடிவொத்தவையா?

79. இரு தற்பூசனிகள்.—

ஓராள் இரண்டு தற்பூசனிகளை விற்கிறன். ஒன்று மற்றொன்றை விட கால் பங்கு பெரியது; இதன் விலை ஒன்றரை மடங்கு அதிகம். இரண்டில் எதை வாங்குவது நல்லது (படம் 74ஐப் பார்க்கவும்)?

80. இரு முலாம் பழங்கள்.—

ஒரே தரத்திலான இரு முலாம் பழங்கள் விற்கப்படுகின்றன. ஒன்றின் சுற்றளவு 60 சென்டிமீட்டர், மற்றொன்றின் சுற்றளவு 50 சென்டிமீட்டர். இரண்டாவதைக் காட்டிலும் முதலாவது ஒன்றரை மடங்கு அதிக விலையுடையது. இரண்டில் எதை வாங்கினல் நமக்கு லாபம்?

81. செர்ரிப் பழம்.—

செர்ரிப் பழத்தின் கொட்டையும், கொட்டையைச் சுற்றியுள்ள பழப் பகுதியும் ஒரே தடிமனுள்ளவை. செர்ரி

படம் 74. எந்தத் தற்பூசனியை வாங்குவது நல்லது?

யும் கொட்டையும் உருண்டையாய் இருப்பதாய் வைத்துக் கொள்வோம். இந்தச் செர்ரியில் கொட்டையை விட பழப் பகுதி எவ்வளவு அதிகம் என்று மனக் கணக்காய்ப் போட்டு விடை கூற முடியுமா?

82. எஃபில் கோபுரம்.—

பாரிஸ் நகரிலுள்ள 300 மீட்டர் உயரமுள்ள எஃபில் கோபுரம் 80,00,000 கிலோகிராம் உருக்கினுல் ஆனது. இதன் மாதிரி உருவம் ஒன்றை நான் ஒரு கிலோகிராம் உருக்கைக் கொண்டு தயாரித்துக் கொடுக்கச் சொல்லியிருக்கிறேன்.

இதன் உயரம் எவ்வளவு இருக்கும்? கண்ணுடி டம்ளரை விட இது பெரிதாய் இருக்குமா, சிறிதாய் இருக்குமா?

83. இரண்டு தட்டுகள்.—

இரண்டு தட்டுகள் வடிவொத்தவையாகவும் ஒரே தடிமனுள்ளவையாகவும் இருக்கின்றன. ஆனல் ஒன்று மற்றென்றை விட எட்டு மடங்கு அதிகம் பிடிக்கக் கூடியது.

சிறியதை விட பெரியது எவ்வளவு அதிக எடையுடையது?

84. குளிர்.—

ஒரே மாதிரி உடைகள் உடுத்திக் கொண்டு ஒரு முழு ஆளும் ஒரு குழந்தையும் வெளியே தெருவில் குளிரில் நிற்கிறார்கள்.

யாருக்கு அதிகமாய்க் குளிரும்?

85. சர்க்கரை.—

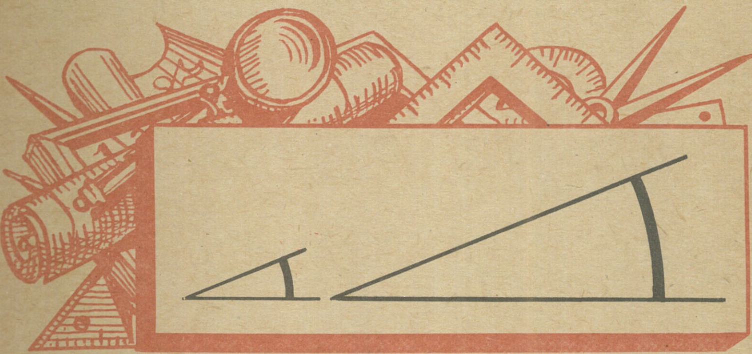
எடையில் எது அதிகம்—ஒரு கிளாஸ் தூள் சர்க்கரையா, அதே மாதிரியான இன்னொரு கிளாஸ் கட்டிச் சர்க்கரையா?

பதில்கள் 62-85

62. மேம்போக்காய்ப் பார்க்கையில் இந்தக் கேள்வி வடிவ கணிதத்துடன் சம்பந்தப்பட்டதாய்த் தோன்றவில்லை. ஆனல் வடிவகணிதத்தை நன்கு அறிந்தவர் புறம்பான பல வகை விவரங்களாலும் மூடிமறைக்கப்பட்டிருப்பினும் வடிவகணித அடித்தளத்தைக் கண்டு கொண்டு விடும் திறனுடையவராய் இருப்பார். இந்தக் கேள்வி வடிவகணித வகைப்பட்டதே, வடிவகணித உதவியின்றி இதற்கு விடை கூற முடியாது.

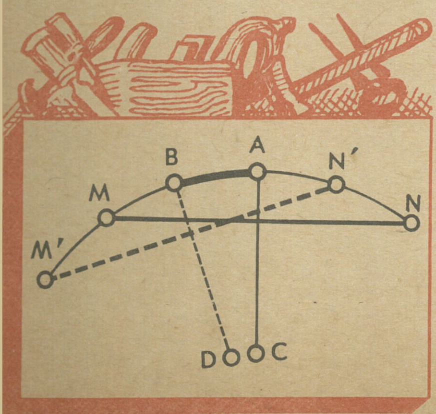
முன்பக்கத்து அச்சு பின்பக்கத்து அச்சை விட சீக்கிரமாய்த் தேயக் காரணம் என்ன? படம் 62ஐக் கவனமாய்ப் பாருங்கள், முன் சக்கரங்கள் பின் சக்கரங்களைக் காட்டிலும் சிறியவை என்பது தெரிகிறது அல்லவா? ஒரே தூரம் செல்வதற்கு, குறைந்த சுற்றளவுள்ள வட்டம் அதிக சுற்றளவுள்ள வட்டத்தை விட அதிக சுற்றுகள் சுற்றியாக வேண்டும்—வடிவகணிதம் இதை நமக்குப் போதிக்கிறது. ஆகவே முன் சக்கரங்கள் அதிகமாய்ச் சுற்றி முன்பக்கத்து அச்சைச் சீக்கிரமாய்த் தேய வைத்துவிடுகின்றன.

63. இந்தக் கோணத்தைப் பூதக் கண்ணுடி $1^1/_2 \times 4 = 6^\circ$ ஆகப் பெருக்குவதாய் நினைத்தால், அது மிகப் பெரிய தவருகும். பூதக் கண்ணுடி கோணத்தின் அளவைப் பெருகச் செய்து விடவில்லை. கோணத்தை அளவிடும் வில் பெரிதாகிவிடுவது உண்மையே, ஆனுல் இதே வீதாசாரத்தில் ஆரமும் பெரிதாகிவிடுகிறது. ஆகவே மையத்திலுள்ள கோணத்தின் அளவு மாற்றமின்றி அப்படியே இருக்கிறது. படம் 75 இதைத் தெளிவுபடுத்துகிறது.



படம் 75.

64. படம் 76ல் MAN ரசமட்டத்தின் வில்லினுடைய ஆரம்ப நிலையைக் குறிக்கிறது, M'BN' புதிய நிலையைக் குறிக்கிறது நாண் M'N'க்கும் நாண் MNக்கும் இடையிலுள்ள கோணம் $1/2^\circ$. ஆரம்பத்தில் Aஇல் இருந்த கொப்புளம் தொடர்ந்து அதே இடத்தில் இருக்க, வில் MNஇன் மையப் புள்ளி Bக்கு நகர்ந்து விடுகிறது. இப்போது நாம் வில் AB இன் நீளத்தைக் கணக்கிட வேண்டும். இந்த வில்லின் ஆரம் 1 மீட்டர், ஆரத்தின் இரு நிலைகளுக்கும் இடையிலுள்ள கோணம் $1/2^\circ$ (ஏனெனில் ஆரத்தின் இரு நிலைகளும் நாண்கள் MNக்கும் M'N'க்கும் நேர்குத்தானவை; இவ்விரு நாண்களுக்கும் இடையிலுள்ள கோணம் $1/2^\circ$).



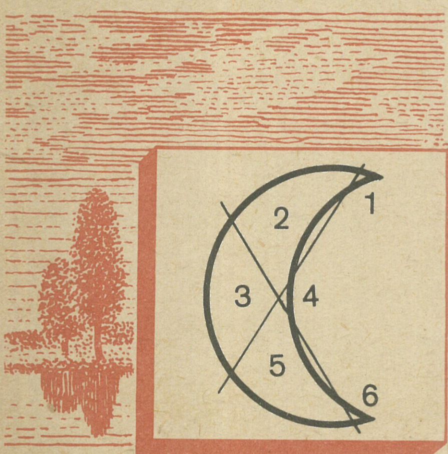
படம் 76.

வில் ABஇன் நீளத்தைக கணக்கிடுவது கடினமல்ல. இதன் ஆரம் 1மீட்டர் (அதாவது 1,000 மில்லிமீட்டர்), இதன் வட்டத்தினுடைய சுற்றளவு $2 \times 3.14 \times 1{,}000 = 6{,}280$ மில்லிமீட்டர். இந்தச் சுற்றளவில் அடங்கும் கோணம் 360° அல்லது 720 அரைப்பாகைகள். ஆகவே $1/2^\circ$க்குரிய வில் ABஇன் நீளம்

$$6{,}280 \div 720 = 8.7 \text{ மில்லிமீட்டர்.}$$

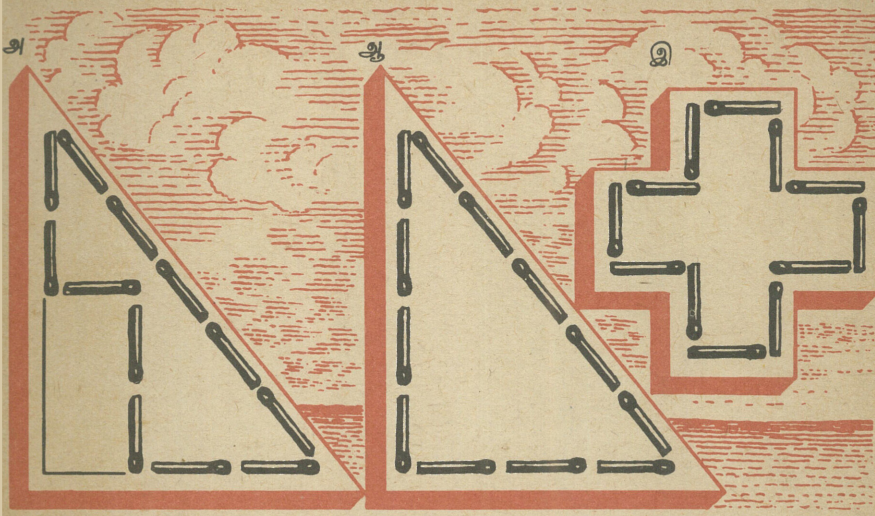
ஆகவே கொப்புளம் நடுக் குறியிலிருந்து (அல்லது முறையாய்ச் சொல்வதெனில் நடுக் குறி இந்தக் கொப்புளத்திலிருந்து) ஏறத்தாழ 9 மில்லிமீட்டர் நகர்ந்து செல்லும், குழாயின் வளையாரம் எவ்வளவுக்கு எவ்வளவு அதிகமாய் இருக்கிறதோ அவ்வளவுக்கு அவ்வளவு ரசமட்டம் உணர்திறன் மிக்கதாய் இருக்கும் என்பது விளங்குகிறது.

65. இங்கு தந்திரமோ, சூழ்ச்சியோ ஏதும் இல்லை. தவறாய் அர்த்தப்படுத்திக் கொண்டுவிடலாம் என்பது ஒன்றுதான் இங்குள்ள அபாயம். பலரும் நினைக்கக் கூடியது போல் அறுகோண வடிவங் கொண்ட பென்சிலுக்கு ஆறு பட்டைமுனைகள் இல்லை. சீவப்படாத பென்சிலாய் இருக்குமாயின் அதற்கு எட்டுப் பட்டைமுனைகள் இருக்கின்றன: ஆறு முகங்களும், இரு சிறு தளங்களும் சேர்ந்து எட்டுப் பட்டைமுனைகளாகின்றன. உண்மையில் அது ஆறு பட்டைமுனைகளைக் கொண்டிருக்குமாயின் அதன் வடிவும் முற்றிலும் வேறு விதமாய் இருக்கும்—நீள்சதுர வெட்டுமுகம் கொண்டதாய் இருக்கும்.



படம் 77.

66. படம் 77ல் காட்டப்பட்டிருப்பது போல் பிறையை இரு நேர் கோடுகளால் 6 பாகங்களாய்ப் பிரிக்கலாம். தெளிவாய்த் தெரியும் பொருட்டு ஆறு பாகங்களும் எண்களால் குறித்துக் காட்டப்பட்டுள்ளன.



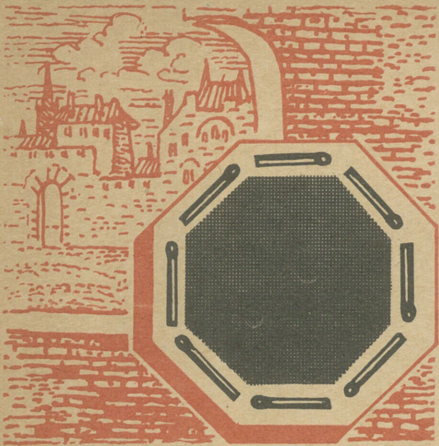
5.S, KOHT. p78, cm 189

படம் 78.

67. படம் 78-அ காட்டுவது போல் தீக்குச்சிகள் திருத்தியமைக்கப்பட வேண்டும். இந்த வடிவத்தின் பரப்பளவு ''தீக்குச்சி'' சதுரத்தைப் போல் நான்கு மடங்காகும். இது தெளிவாகவே விளங்குகிறது. இதை மூளியில்லாத முக்கோணமாய் ஆக்குவோமாயின், நமக்குக் கிடைப்பது செங்கோண முக்கோணமாகும். இதன் அடிப்பக்கம் 3 தீக்குச்சிகளுக்கும், உயரம் 4 தீக்குச்சிகளுக்கும் சமம்.* இந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு இதன் அடிப்பக்கத்தின் ஒரு பாதியை இதன் உயர்த்தால் பெருக்கி வரும் தொகைக்குச் சமம்: $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ (படம் 78-ஆ). ஆனல் நாம் அமைத்திருக்கும் வடிவத்தின் பரப்பு தெளிவாகவே முக்கோணப் பரப்பை விட இரண்டு ''தீக்குச்சி'' சதுரங்கள் குறைவானது. ஆகவே இதன் பரப்பளவு 4 ''தீக்குச்சி'' சதுரங்களுக்குச் சமமாகும்.

68. ஒரே சுற்றளவு கொண்ட வடிவங்களில் வட்டமே மிகப் பெரியது என்று நிரூபிக்க முடியும். ஆனல் தீக்குச்சிகளைக் கொண்டு

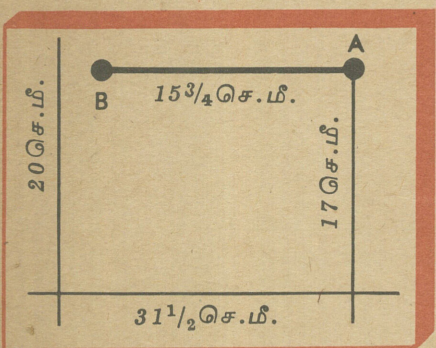
* பைத்தாகரசின் தேற்றத்தை அறிந்த வாசகர்கள் நமது முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணமாகும் என்று நாம் இவ்வளவு நிச்சயமாய்க் கூறுவதன் காரணத்தைப் புரிந்து கொள்வார்கள்: $3^2 + 4^2 = 5^2$.



வட்டத்தை அமைக்க முடியாது. ஆயினும் எட்டுத் தீக்குச்சிகளைக் கொண்டு பெருமளவுக்கு வட்டத்தை ஒத்ததாகிய ஒழுங்கு எண்கோணத்தை (படம் 79) அமைத்திடலாம். நமக்கு வேண்டிய வடிவம் இந்த ஒழுங்கு எண்கோணமேதான், ஏனெனில் எட்டுத் தீக்குச்சிகளைக் கொண்டு அமைக்கப்படும் வடிவங்களில் இதுதான் மிகப் பெரியது.

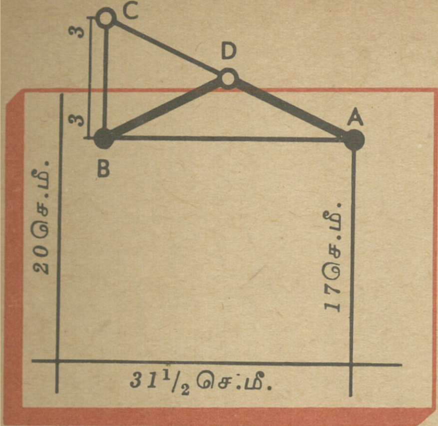
படம் 79.

69. இந்த உத்தி கணக்குக்கு விடை காண்பதற்காக முதலில் நாம் இந்த நீள் உருளைக் கலனை வெட்டி அதன் பரப்பைத் தட்டையாக்க வேண்டும். நமக்குக் கிடைப்பது ஒரு செவ்வகமாகும் (படம் 80). இதன் அகலம் 20 சென்டிமீட்டர்; நீளம் நீள் உருளையின் சுற்றளவுக்குச் சமம், அதாவது $10 \times 3\frac{1}{7} = 31.5$ சென்டிமீட்டர் (ஏறத்தாழ). இந்தச் செவ்வகத்தில் ஈ இருக்கும் இடத்தையும் தேன் துளி இருக்கும் இடத்தையும் குறித்துக் கொள்வோம். அடியிலுள்ள தளத்திலிருந்து 17 சென்டிமீட்டர் உயரத்தில் புள்ளி Aஇல் ஈ இருக்கிறது. தேன் துளியானது அதே உயரத்தில், ஆனால் Aஇலிருந்து நீள் உருளைச் சுற்றளவில் பாதித்தூரத்தில், அதாவது $15\frac{3}{4}$ சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் புள்ளி Bஇல் இருக்கிறது.

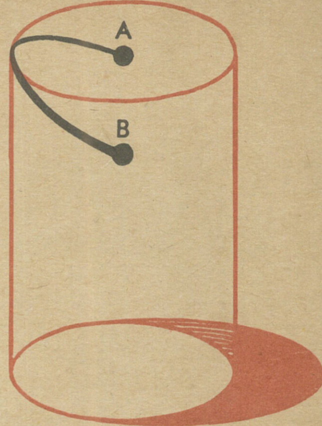


படம் 80.

ஈ எவ்விடத்தில் மேலே ஏறி நீள் உருளைக்குள் இறங்க வேண்டுமென்பதைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு நாம் பின்வருமாறு



படம் 81.



படம் 82.

செய்தல் வேண்டும். புள்ளி Bஇலிருந்து (படம் 81) உச்சித் தளத்துக்கு நேர்குத்துக் கோடு வரைந்து அதே அளவு உயரத்துக்கு அதை மேலே நீட்டிச் செல்ல வேண்டும். இப்போது நாம் Cஐ வந்தடைகிறோம். இனி நேர் கோடிட்டு Cஐயும் Aஐயும் சேர்க்கிறோம். D என்னும் புள்ளியில்தான் ஈ நீள் உருளையின் உட்புறத்துக்குச் செல்ல வேண்டும். ADBதான் நமக்கு வேண்டிய குறுக்கு வழி.

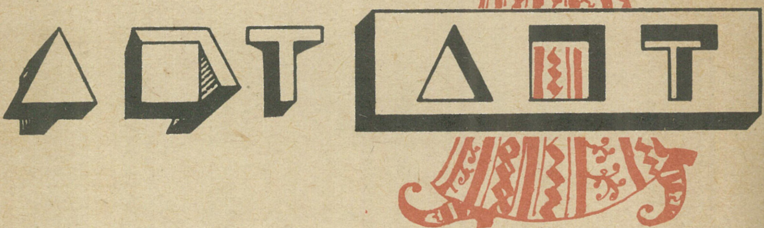
பிரித்துத் தட்டையாக்கப்பட்ட செவ்வகத்தை இனி நீள் உருளையாய் உருட்ட வேண்டும். தேன் துளியைச் சென்றடைய ஈ செல்ல வேண்டிய வழியினை இப்போது நாம் கண்ணுறலாம் (படம் 82).

இம்மாதிரியான சந்தர்ப்பங்களில் ஈ இந்த வழியில்தான் போகிறதா என்பது எனக்குத் தெரியாது. கூர்மையான முகர்வுணர்வு கொண்ட ஈயானது உண்மையில் இந்தக் குறுக்கு வழியிலே சென்றாலும் செல்லலாம்—இது சாத்தியமே என்றாலும் நிகழ்தகவுடையதல்ல. கூர்மையான முகர்வுணர்வு மட்டும் போதாது, வடிவகணித அறிவும் அவசியமாகும்.

70. இம்மாதிரியான தக்கை இருக்கிறது. படம் 83ல் இது காட்டப்படுகிறது. சதுரம், முக்கோணம், வட்டம் ஆகிய மூன்று துளைகளுக்கும் இது பொருந்துவதாகும் என்பது விளங்குகிறது.

படம் 83.

படம் 84.



படம் 85.

படம் 86.

71. படம் 84ல் காட்டப்படும் வட்டத் துளை, சதுரத் துளை, சிலுவை வடிவத் துளை ஆகிய மூன்றுக்கும் பொருத்தமான தக்கையின் மூன்று முகங்களும் படத்தில் காட்டப்படுகின்றன.

72. முடிவில், இந்த மூன்று துளைகளுக்கு ஏற்றதாகிய தக்கையுங்கூட இருக்கிறது. இதன் மூன்று முகங்களும் படம் 85ல் காட்டப்படுகின்றன.

73. விபரீதமாய்த் தோன்றினாலுங்கூட இவ்வளவு சிறிய ஓட்டை வழியாய் 5-கோப்பெக் காசு புகுவது சாத்தியமே. காகிதத்தை மடித்து வட்ட வடிவ ஓட்டையை நீட்டி இடுக்காக்கிக் கொள்ள வேண்டும் (படம் 86). இந்த இடுக்கு வழியேதான் 5-கோப்பெக் காசு போகிறது.

இதன் மர்மத்தை வடிவகணிதம் எளிய முறையில் தெளிவுபடுத்துகிறது. 2-கோப்பெக் காசின் விட்டம் 18 மில்லி மீட்டர்; இதன் சுற்றளவையும் சுலபமாய்க் கணக்கிடலாம், இது 56 மில்லிமீட்டருக்குச் சிறிது அதிகமானது. ஆகவே இதில் பாதி அளவு—அதாவது 28 செண்டிமீட்டர்—இடுக்கின் நீளமாகும். 5-கோப்பெக் காசின் விட்டம் 25 மில்லிமீட்டர் தான், ஆகவே இந்தக் காசு 1.5 மில்லிமீட்டர் தடி மனுடையதாய் இருப்பினும் 28 மில்லிமீட்டர் நீளமுள்ள இடுக்கில் சுலபமாய் நுழைய முடியும்.

74. கோபுரத்தின் மெய்யான உயரத்தை நிர்ணயிப்பதற்கு முதலில் நாம் புகைப்படத்திலுள்ள கோபுரத்தின் உயரத் தையும் அடிப்பக்கத்தையும் சரிவர அளந்து குறித்துக் கொள்ள வேண்டும். இவை முறையே 95 செண்டிமீட்டராக வும் 19 மில்லிமீட்டராகவும் இருப்பதாய்க் கொள்வோம். பிறகு மெய்யான கோபுரத்தின் அடிப்பக்கத்தை அளந்து தெரிந்து கொள்கிறீர்கள். இது 14 மீட்டர் இருப்பதாய் வைத்துக் கொள்வோம்.

வடிவகணிதத்தின்படி புகைப்படத்திலுள்ள கோபுரமும் மெய்யான கோபுரமும் வடிவொத்தவை. அதாவது, புகைப் படக் கோபுரத்தின் உயரத்துக்கும் அடிப்பக்கத்துக்குமுள்ள விகிதம் மெய்யான கோபுரத்தின் உயரத்துக்கும் அடிப்பக் கத்துக்குமுள்ள விகிதத்துக்குச் சமம். புகைப்படக் கோபுரத் தில் இந்த விகிதம் $95 \div 19 = 5$ ஆகும். ஆகவே கோபுரத் தின் உயரம் அதன் அடிப்பக்கத்தைப் போல் 5 மடங்கு அதிகமாகும். எனவே மெய்யான கோபுரத்தின் உயரம்

$$14 \times 5 = 70 \text{ மீட்டர்.}$$

ஆனால் ஒன்று: கோபுரத்தின் உயரத்தை இவ்வாறு நிர்ணயிப்பதற்கு நம்மிடம் மெய்யாகவே நன்கு அமைந்த புகைப்படம் இருக்க வேண்டும். அனுபவமில்லாதவர்கள் சில சமயம் எடுக்கிறார்களே, அந்த மாதிரியான வக்கிர

உருவமாய்ச் சிதைத்துக் காட்டும் புகைப்படமாய் இருக்கலாகாது.

75. இவ்விரு கேள்விகளுக்கும் உடன்பாடான பதில் அடிக்கடி அளிக்கப்படுகிறது. ஆனால் உண்மையில் முக்கோணங்கள் மட்டுமே வடிவொத்தவை. படச் சட்டத்தின் உட்புறச் செவ்வகமும் வெளிப்புறச் செவ்வகமும் பொதுவாய்ப் பேசுமிடத்து வடிவொத்தவை அல்ல. முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவையாய் இருப்பதற்கு அவற்றின் ஒத்திசைவுக் கோணங்கள் சமமாய் இருந்தால் போதும்; உட்புற முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் வெளிப்புற முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு இணைவாய் இருப்பதால் இரு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை ஆகிவிடுகின்றன. ஆனால் பல்கோணங்கள் வடிவொத்தவை ஆவதற்கு, அவற்றின் ஒத்திசைவுக் கோணங்கள் சமமாய் இருந்தால் மட்டும் (அல்லது, அவற்றின் ஒத்திசைவுப் பக்கங்கள் இணையாய் இருந்தால் மட்டும்) போதாது; இந்தப் பல்கோணங்களது ஒத்திசைவுப் பக்கங்கள் ஒரே விகிதாசார அளவுள்ளனவாய் இருப்பதும் அவசியமாகும். படச் சட்டத்தின் உட்புற, வெளிப்புறச் செவ்வகங்களைப் பொறுத்த வரை, அவை சதுரங்களாய் (பொதுவாய்ச் சாய்துரங்களாய்)இருக்கும் போது மட்டும்தான் அவை வடிவொத்தவையாய் இருக்கின்றன. ஏனைய எல்லா நிலைமைகளிலும் உட்புற, வெளிப்புறச் செவ்வகங்கள் விகிதாசார ஒற்றுமை பெற்றிருக்கவில்லை, ஆகவே இந்த வடிவங்கள் வடிவொத்தவை அல்ல. தடித்த செவ்வகச் சட்டங்களில் (படம் 87) இவ்வடிவங்கள் வடிவொத்தவை அல்ல என்பது

படம் 87.

மிகவும் தெட்டத் தெளிவாகிவிடுகிறது. இடப்பக்கத்திலுள்ள சட்டத்தில் வெளிப்புறப் பக்கங்கள் 2:1 என்கிற விகிதத்தி

லும், உட்புறப் பக்கங்கள் 4 : 1 என்கிற விகிதத்திலும் இருக்கின்றன. வலப்புறச் சட்டத்தில் இந்த விகிதங்கள் முறையே 4 : 3, 2 : 1.

76. இதற்கு விடை காண வானியல் விவரங்கள் தெரிந்திருக்க வேண்டுமென்று கேட்கையில் பலருக்கும் வியப்பாய் இருக்கும். பூமிக்கும் சூரியனுக்குமுள்ள தொலைவு, சூரியனது

படம் 88.

விட்டத்தின் அளவு ஆகியவை தெரிந்திருக்க வேண்டும்.

கம்பியால் வீழ்த்தப்படும் நிறைநிழலின் நீளம் படம் 88ல் காட்டப்படும் வடிவகணித உருவத்தால் நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. பூமிக்கும் சூரியனுக்குமுள்ள தொலைவு (15,00,00,000 கிலோமீட்டர்) சூரியனுடைய விட்டத்தைவிட (14,00,000 கிலோமீட்டர்) எத்தனை மடங்கு பெரிதாய் இருக்கிறதோ, அத்தனை மடங்கு கம்பியின் விட்டத்தைவிட கம்பியின் நிறைநிழல் பெரிதாய் இருக்கும் என்பதை இந்தப் படத்திலிருந்து எளிதில் தெரிந்து கொள்ளலாம். முழு எண்ணுய்ச் சொல்வதெனில், முன்னவை இரண்டின் விகிதம் 115. ஆகவே கம்பியால் வீழ்த்தப்படும் நிறைநிழலின் நீளம்

$4 \times 115 = 460$ மில்லிமீட்டர் $= 46$ சென்டிமீட்டர் ஆகும்.

கம்பிகளின் நிழல்கள் தரையிலோ, வீட்டுச் சுவர்களிலோ அரிதாகவே காணப்படுவதற்கு இவற்றின் நிறைநிழல்களது இந்த மிகச் சொற்ப நீளமேதான் காரணம். அரசபுரசலாய்த் தெரியும் மெல்லிய நிழற் கீற்றுகள் குறைநிழல்களே அன்றி நிறைநிழல்கள் அல்ல.

இம்மாதிரியான கணக்குகளுக்கு விடை காண்பதற்கான இன்னொரு முறை மூளைக் குழப்பிப் புதிர் 7ல் விளக்கப்பட்டிருக்கிறது.

77. விளையாட்டுக் கல்லின் எடை 1 கிலோகிராமாகும், அதாவது நான்கு மடங்கு குறைவாய் இருக்கும் என்கிற பதில் அறவே

தவறானது. சிறிய கல் பெரியதைவிட நான்கு மடங்கு குட்டையானது என்பது மட்டுமல்ல, நான்கு மடங்கு குறுகலானதும் நான்கு மடங்கு மெல்லியதும் ஆகும். ஆகவே இதன் கனபரிமாணமும் எடையும் $4 \times 4 \times 4 = 64$ மடங்கு குறைவாய் இருக்கும். எனவே சரியான விடை:

$$4{,}000 \div 64 = 62.5 \text{ கிராம்.}$$

78. இந்தக் கணக்கு மேற்கூறியதை ஒத்ததுதான், ஆகவே நீங்களே இதற்குச் சரியான விடையைக் கணக்கிட்டுக் கொள்ளலாம். மனித உடல்கள் ஏறத்தாழ ஒத்தனவாய் இருப்பதால், இரு மடங்கு உயரமுள்ள ஆள் குள்ளமாய் இருப்பவனை விட இரு மடங்கு அல்ல, எட்டு மடங்கு அதிக எடையுடையவனாய் இருப்பான்.

உலகம் அறிந்த மிகப் பெரிய நெட்டை மனிதன் அல்ஷேசியாவைச் சேர்ந்தவன், இவனது உயரம் 2.75 மீட்டர் —சராசரி உயரமுள்ள மனிதனை விட ஏறத்தாழ 1 மீட்டர் கூடுதலான உயரமுள்ளவன் இவன். மிகவும் குட்டையான விசித்திரக் குள்ளன் 40 சென்டிமீட்டருக்கும் குறைவான உயரமுள்ளவன்—முழு எண்ணில் சொல்வதெனில் அல்ஷேசியாவைச் சேர்ந்தனைவிட ஏழு மடங்கு குட்டையானவன்; தராசின் ஒரு தட்டில் நெட்டையனை நிற்க வைத்தால், சமன் செய்வதற்கு மறு தட்டில் $7 \times 7 \times 7 = 343$ குள்ளர்களை நிற்க வைத்தாக வேண்டும்; அதாவது ஒரு பெருங் கூட்டத்தையே திரட்டியாக வேண்டும்.

79. பெரிய தற்பூசனியின் எடை சிறியதைவிட $1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4} = \frac{125}{64}$ மடங்கு, அதாவது ஏறத்தாழ இரு மடங்கு அதிகம்.

ஆகவே பெரியதை வாங்குவதுதான் நல்லது: ஒன்றரை மடங்கே அதிக விலையுடைய இது இரண்டு மடங்குக்கும் கூடுதலான பழ அடக்கம் கொண்டதாய் இருக்கிறது.

அப்படியானால் பழம் விற்போர் இம்மாதிரியான தற்பூசனிகளுக்கு இரு மடங்கு அதிக விலை கூறாமல் ஒன்றரை மடங்கு அதிக விலை கூறக் காரணம் என்னவென்று கேட்கலாம். காரணம் எளியதே. விற்போரில் மிகப் பெரும்பாலோர் வடிவகணிதம் அதிகம் தெரியாதவர்கள். சொல்லப் போனால் வாங்குவோரும் அப்படித்தான், அதனால்தான் அடிக்கடி

இவர்கள் இம்மாதிரியான லாபகரமான கொள்வினைகளை வேண்டாமென மறுத்து விடுகிருர்கள். சிறிய தற்பூசனிகளைக் காட்டிலும் பெரியவற்றை வாங்குவதே நல்லது என்று திட்ட வட்டமாய்க் கூறலாம், ஏனெனில் பெரியவை அவற்றுக் குரிய விலையைக் காட்டிலும் குறைவான விலைக்கே எப்போ தும் விற்கப்படுகின்றன—ஆனுல் வாங்குவோரில் மிகப் பெரும் பாலோருக்கு இந்த உண்மை தெரியாது.

முட்டைகள் எடைக் கணக்கில் விற்கப்படவில்லை என்ருல், சிறிய முட்டைகளுக்குப் பதில் பெரிய முட்டைகளை வாங்கு வது இதே காரணத்தால் லாபகரமாயிருக்கும்.

80. சுற்றளவுகளின் விகிதம் அவற்றுக்கு இணையான விட்டங்களின் விகிதத்துக்குச் சமம். ஒரு முலாம் பழத்தின் சுற்றளவு 60 சென்டிமீட்டர், மற்ருென்றின் சுற்றளவு 50 சென்டிமீட்டர்— ஆகவே அவற்றின் விட்டங்களது விகிதம் $60 \div 50 = \frac{6}{5}$; அவற்றின் பருமன்களது விகிதம்

$$\left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{216}{125} \approx 1.73.$$

எடை அளவில் அல்லாமல் பருமன் அளவில் விலை நிர்ணயிக்கப்படுமாயின், சிறியதைக் காட்டிலும் பெரிய முலாம் 1.73 மடங்கு அதாவது 73 சதவீதம் கூடுதலான விலையுடையதாகும். ஆனுல் விற்பவர் பெரிய பழத்துக்கு 50 சதவீதம் கூடுதலான விலையே கேட்கிருர். ஆகவே பெரியதை வாங்குவதே லாபகரமானது.

81. செர்ரிப் பழத்தின் விட்டம் அதனுள் இருக்கும் கொட்டை யின் விட்டத்தைப் போல் மூன்று மடங்காகும் என்று கூறப் படுகிறது. ஆகவே கொட்டையின் பருமனைப் போல் செர்ரி யின் பருமன் $3 \times 3 \times 3 = 27$ மடங்காகும். ஆகவே செர்ரியில் 1/27 பங்கு கொட்டை, மீதமுள்ள 26/27 பங்கு பழம். வேறு விதமாய்ச் சொல்வதெனில், கொட்டையைக் காட்டிலும் பழப் பகுதி 26 மடங்கு அதிக கனபரிமாணம் கொண்ட தாகும்.

82. மெய்யான எஃபீல் கோபுரத்தைக் காட்டிலும் அதன் மாதிரி யமைப்பு 80,00,000 மடங்கு இலேசானது என்பதாலும், இரண்டும் ஒரே உலோகத்தால் ஆனது என்பதாலும், மாதிரி

யமைப்பின் கனபரிமாணம் மெய்யான கோபுரத்தினுடையதைக் காட்டிலும் 80,00,000 மடங்கு குறைவாய் இருத்தல் வேண்டும். வடிவொத்த உருவங்களின் கனபரிமாணங்களது விகிதம் அவற்றின் உயரங்களது விகிதத்தின் மும்மடிப் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமம் என்பது ஏற்கனவே உமக்குத் தெரியும். ஆகவே மூலக் கோபுரத்தைவிட மாதிரியமைப்பு 200 மடங்கு சிறிதாய் இருக்கும், ஏனெனில்

$$200 \times 200 \times 200 = 80,00,000.$$

மெய்யான கோபுரத்தின் உயரம் 300 மீட்டர். எனவே, மாதிரியமைப்பின் உயரம்

$$300 \div 200 = 1\frac{1}{2} \text{ மீட்டர்.}$$

மாதிரியமைப்பு சுமார் ஓராள் உயரமுடையதாய் இருக்கும்.

83. இரு தட்டுகளும் வடிவகணித வழியில் வடிவொத்தவை. ஆனால் பெரியது சிறியதைவிட 8 மடங்கு அதிகம் பிடிக்கக் கூடியதாய் இருப்பதால், பெரியதன் நீள் (linear) அளவுகள் 2 மடங்காய் இருத்தல் வேண்டும்: அதாவது உயரத்திலும் அகலத்திலும் அது இரு மடங்கு பெரிதாய் இருத்தல் வேண்டும். அப்படியானால், அதன் பரப்பளவு $2 \times 2 = 4$ மடங்கு அதிகமாய் இருத்தல் வேண்டும், ஏனென்றால் வடிவொத்த பொருள்களின் பரப்பளவுகளது விகிதம் அவற்றின் நீள் அளவுகளின் சதுரப் பெருக்கங்களது விகிதத்துக்குச் சமம். தட்டுகளின் சுவர்கள் ஒரே அளவு தடிமனுடையவை, தட்டுகளின் எடைகளது விகிதம் அவற்றின் பரப்பளவுகளது விகிதத்துக்குச் சமம். எனவே சிறிய தட்டைவிட பெரிய தட்டு நான்கு மடங்கு அதிக எடையுடையது.

84. மேம்போக்காய்ப் பார்க்கையில் இது கணிதம் சம்பந்தப்பட்ட கேள்வியாய்த் தெரியவில்லை. ஆனால் உண்மையில் முந்தியதைப் போல் இதற்கும் வடிவகணித வழியில் விடை காணலாம்.

இதற்கு விடை காண முற்படுமுன் இதையொத்த, ஆனால் இதனிலும் எளிய வேறொரு பிரச்சினையைப் பரிசீலிப்போம்.

இரு கொதிகலன்கள் ஒரே உலோகத்தால் ஆனவை, வடிவொத்தவை; ஆனால் ஒன்று பெரியது, மற்றொன்று சிறியது. இரண்டிலும் வென்னீரை நிரப்புகிறோம். இவை இரண்டில் எதில் நீர் சீக்கிரமாய்ச் சூடு ஆறும்?

சாதாரணமாய்ப் பொருள்களின் மேற் பரப்பின் மூலம் தான் சூடு வெளிச் செல்கிறது. ஆகவே கனபரிமாணத்தில் ஓரலகுக்கு உரிய பரப்பளவு எதற்கு அதிகமாய் இருக்கிறதோ, அந்தக் கொதிகலன்தான் வேகமாய்க் குளிர்ந்து செல்லும். ஒரு கொதிகலன் மற்றொன்றைவிட n மடங்கு அதிக உயரமும் அகலமும் உடையதாய் இருந்தால், அதன் பரப்பளவு n^2 மடங்கும், கனபரிமாணம் n^3 மடங்கும் கூடுதலாய் இருக்கும், ஏனெனில் பெரிய கொதிகலனின் பரப்பளவில் ஒவ்வோர் அலகுக்கும் n மடங்கு வீதம் கனபரிமாணம் கூடுதலாகிறது. எனவே சிறிய கொதிகலன்தான் சீக்கிரமாய்க் குளிர்ந்து செல்கிறது.

இதே காரணத்தினால், குளிரில் வெளியே நிற்கும் குழந்தைக்கு அதைப் போலவே உடுப்புகள் உடுத்திய முழு ஆளைக் காட்டிலும் அதிகமாய்க் குளிர்கிறது. உடம்பில் ஒவ்வொரு கன சென்டிமீட்டருக்குமுள்ள வெப்பத்தின் அளவு இருவருக்கும் ஏறத்தாழ ஒன்றேதான். ஆனால் முழு ஆளைவிட குழந்தைக்கு உடலின் ஒரு கன சென்டிமீட்டருக்குரிய வெப்ப-வெளிச்செல் பரப்பு அதிகமாகும்.

மனிதனின் விரல்களும் மூக்கும் உடலின் பிற பகுதிகளைக் காட்டிலும் குளிரால் அதிகமாய்ப் பாதிக்கப்படுவதற்கும் தாக்குண்டு புண்படுவதற்கும் இதுவேதான் காரணம்; கனபரிமாணத்துடன் ஒப்பிடுகையில் மேற் பரப்பளவு உடலின் பிற பகுதிகளில் அவ்வளவு அதிகமாய் இருக்கவில்லை.

முடிவில், இதே முறையில் விளக்கப்பட வேண்டிய இன்னொரு உதாரணத்தையும் குறிப்பிடலாம்: முழுக் கட்டையிலிருந்து வெட்டியெடுக்கப்பட்ட சிம்புகள்அந்தக் கட்டையைக் காட்டிலும் சீக்கிரமாய்த் தீ பிடித்து எரியக் காரணம் என்ன?

மேற்பரப்பிலிருந்து பொருளின் முழு உடலுக்கும் வெப்பம் பரவிச் செல்கிறது. ஆகவே சிம்பின் (இதன் வெட்டுமுகம் சதுரமாய் இருப்பதாய்க் கொள்வோம்) மேற்பரப்பையும் கனபரிமாணத்தையும் அதே அளவு நீளமும் அதே சதுர வடிவ வெட்டுமுகமும் கொண்ட முழுக் கட்டையின் மேற் பரப்போடும் கனபரிமாணத்தோடும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க

வேண்டும். முழுக் கட்டையிலும் சிம்பிலும் ஒரு கன சென்டி மீட்டர் மரத்துக்கான மேற்பரப்பின் அளவை இவ்விதம் நிர்ணயித்தாக வேண்டும். முழுக் கட்டையானது சிம்பை விட பத்து மடங்கு அதிக தடிமனுடையது என்றால், முழுக் கட்டையானது சிம்பைக் காட்டிலும் 10 மடங்கு அதிகமான மேற்பரப்பும், 100 மடங்கு அதிகமான கனபரிமாணமும் கொண்டதாய் இருக்கும். ஆகவே மேற்பரப்பில் ஓர் அலகுக் குரிய கனபரிமாணம் முழுக் கட்டையில் இருப்பது போல் சிம்பில் பத்து மடங்கு குறைவாய் இருக்கிறது. இதன் அர்த்தம் என்னவெனில், ஒரே அளவு வெப்பமானது முழுக் கட்டையைவிட சிம்பில் பத்து மடங்கு குறைவான மரத்தில் சூடேற்ற வேண்டியிருக்கிறது. வெப்பத்துக்கு ஆதாரமான தீ சிம்பில் சீக்கிரமாய்ச் சூடேறச் செய்து முழுக் கட்டையை விட அதைச் சீக்கிரமாய்ப் பற்றி எரியச் செய்கிறது. (மரம் நல்ல வெப்பக் கடத்தி அல்ல என்பதால், இந்த ஒப்பீடு குத்துமதிப்பானதே என்பதைக் குறிப்பிடுதல் வேண்டும்— இது இந்நிகழ்வு அனைத்துக்குமுரிய குணாதிசயத்தைக் குறிக் கிறதே அன்றி இதன் அளவியல் அம்சத்தை அல்ல.)

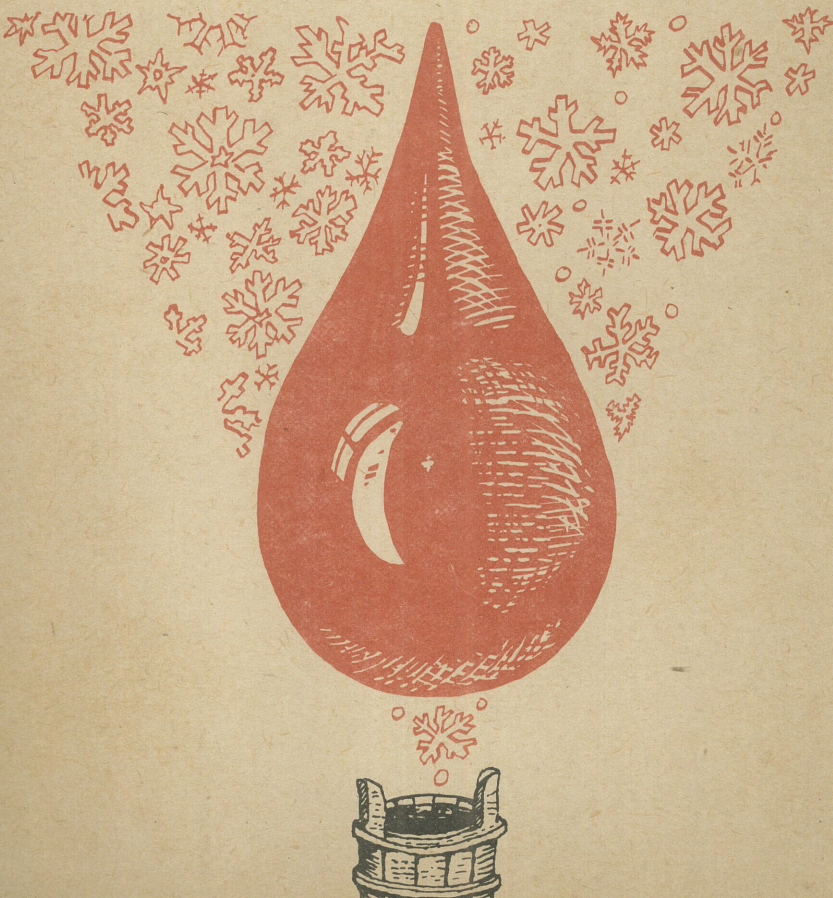
85. பார்வைக்கு இது மிக வினயமானதாய்த் தோன்றினாலும், சற்று சிந்தித்துப் பார்ப்போமாயின் எளிதில் விடை காணக் கூடியதே. பிரச்சினையை எளிதாக்கும் பொருட்டு கட்டிச் சர்க்கரையின் விட்டம் தூள் சக்கரையினுடையதைப் போல் 100 மடங்காய் இருப்பதாய் வைத்துக் கொள்வோம். பிறகு சர்க்கரைத் தூள்களின் விட்டமும் கிளாசின் விட்டமும் 100 மடங்கு பெரிதாகிவிடுவதாய்க் கற்பனை செய்து கொள்வோம். கிளாசின் கொள்திறன் $100 \times 100 \times 100 = 10,00,000$ மடங்கு அதிகரித்துவிடும். அதிலுள்ள சர்க்கரையின் எடையும் இதே வீதாசாரத்தில் அதிகரித்துவிடும். இனி சாதாரண கிளாசில் அடங்கக்கூடிய இந்தப் பிரம்மாண்டச் சர்க்கரைத் தூளின் எடையை அளப்போம்; அதாவது நமது பிரம்மாண்ட கிளாசி லுள்ள சர்க்கரையில் பத்து லட்சத்தில் ஒரு பங்கின் எடையை அளப்போம். சாதாரண தூள் சர்க்கரை நிறைந்த சாதாரண கிளாசின் எடை எவ்வளவோ, அதே அளவுதான் இந்த எடையும் இருக்கும். அப்படியானால் நமது பிரம்மாண்டச் சர்க்கரைத் தூள் எப்படிப்பட்டது? கட்டிச் சர்க்கரையே தவிர அது வேறு ஒன்றுமல்ல. ஆகவே ஒரு கிளாஸ் கட்டிச்

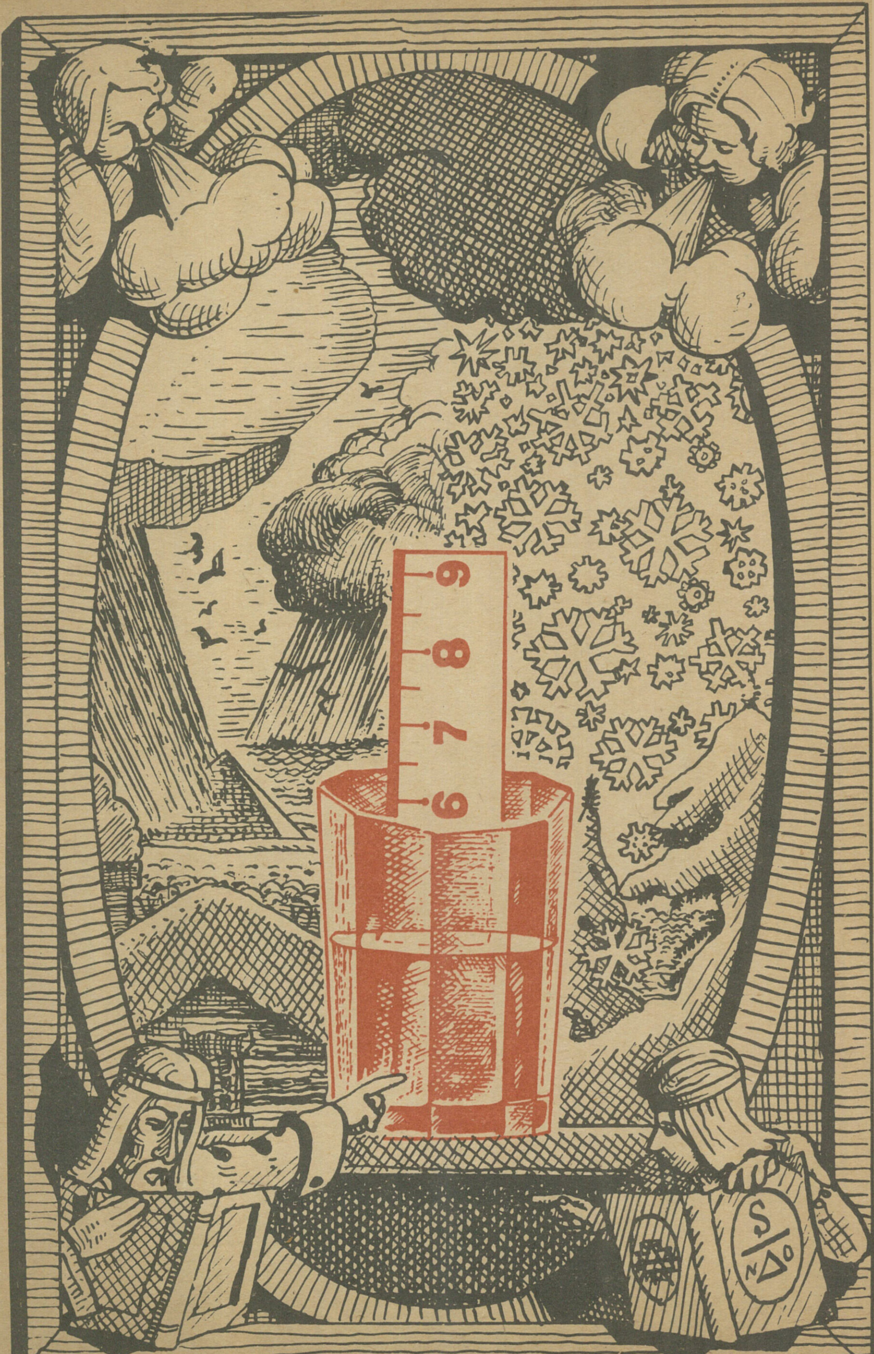
சர்க்கரையின் எடையும் ஒரு கிளாஸ் தூள் சர்க்கரையின் எடையும் ஒன்றேதான்.

சர்க்கரைத் தூளை 100 மடங்குக்குப் பதிலாய் 60 மடங்கு பெரிதாக்கினாலும் விளைவில் எந்த வித்தியாசமும் இல்லை. கட்டிச் சர்க்கரையானது வடிவகணித வழியில் தூள் சர்க்கரையை ஒத்ததே என்பதுதான் நமது வாதத்தின் சாரப் பொருள். இப்படிக் கொள்வது நூற்றுக்கு நூறு சரியான தல்ல என்றாலும், உண்மைக்கு மிக அருகே அமைந்ததுதான்.

9

மழையையும் பனியையும் அளத்தல்





86. மழைமானி.—

சோவியத் கூட்டரசில் லெனின்கிராது மழை மிகுந்த நகரம் என்பதாய், உதாரணமாய் மாஸ்கோவைக் காட்டிலும் அதிக மழை பெறும் நகரம் என்பதாய்ச் சொல்வது வழக்கமாகிவிட்டது. ஆனால் விஞ்ஞானிகள் இதை மறுக்கிறார்கள். லெனின்கிராதைவிட மாஸ்கோதான் மழையின் மூலம் அதிக அளவு நீர் பெறுகிறது என்று விஞ்ஞானிகள் கூறுகிறார்கள். அவர்கள் இதை எப்படித் தெரிந்து கொண்டார்கள்? மழை நீரை அளக்க முடியுமா?

கடினமாய்த் தோன்றிய போதிலும் நீங்களே நேரில் இதைச் செய்யத் தெரிந்து கொண்டுவிடலாம். தரையில் விழும் அவ்வளவு நீரையும் பிடித்து வைத்து அளக்க வேண்டுமென்று நினைக்காதீர்கள். மழை நீர் ஓடிச் சென்றுவிடாமலும், மண்ணினால் உட்கொள்ளப்பட்டு விடாமலும் இருக்குமாயின் நாம் மழை பெய்து சேர்ந்த நீரின் ஆழத்தை அளந்தால் போதும். இது கடினமல்ல. மழை பெய்யும் போது எங்கும் சீராகவே பெய்கிறது: ஒரு வீட்டுத் தோட்டத்தில் மழை பெய்தும் பக்கத்து வீட்டுத் தோட்டத்தில் மழை பெய்யாமலும் இருப்பதில்லை. எனவே ஓரிடத்தில் மழை நீரின் ஆழத்தை அளந்தால் போதும், மழை பெய்த ஒரு முழுப் பிரதேசத்திலும் மழை நீரின் ஆழம் தெரிந்துவிடும்.

மழை நீரை அளப்பதற்கு என்ன செய்ய வேண்டுமென்று இதற்குள் நீங்கள் ஊகித்திருப்பீர்கள். நீர் ஓடிச் சென்றுவிடாமலும் தரைக்கடியில் போய்விடாமலும் இருக்கும்படியான ஒரு சிறு இடத்தை அமைத்துக் கொண்டால் போதும். வாளியை ஒத்த வாய் திறந்த எந்தப் பாத்திரத்தையும் கொண்டு இதைச் செய்துவிடலாம். செங்குத்தான உடலைக் கொண்ட (வட்ட நேர் உருளை வடிவம் கொண்ட) வாளி இருக்குமானால், மழை பெய்யும் இடத்தில் அதைக் கொண்டு வந்து வையுங்கள்,* மழை நின்றதும் வாளியில் சேர்ந்திருக்கும் நீரின் ஆழத்தை அளந்தால் போதும், பெய்த மழையின் அளவைக் கணக்கிட்டு விடலாம்.

---

* பாத்திரத்தைக் கூடுமான அளவுக்கு உயரத்தில் வைக்க வேண்டும், அப்போதுதான் வெளியே தரையில் விழும் துளிகள் தெறித்துப் பாத்திரத்துக்குள் சேராதபடி தடுக்க முடியும்.

வீட்டில் நாம் செய்த இந்த மழைமானியில் நீரின் ஆழத்தை அளப்பது எப்படி? அளவுகோலைக் கொண்டா? அதில் நீர் நிறைய இருந்தால் இப்படிச் செய்யலாம்தான். ஆனால் சாதாரணமாய் அதில் 2 அல்லது 3 சென்டிமீட்டருக்கு மேல் நீர் இருக்காது, சில சமயம் ஒரு சில மில்லிமீட்டருங்கூட இருக்காது. இந்த நீரை அளவுகோலைக் கொண்டு பிழையின்றி அளக்க முடியாது. நமது கணக்குக்கு ஒவ்வொரு மில்லிமீட்டரும், அதன் பின்னமுங்கூட முக்கியமானதாகும். சரி, என்ன செய்யலாம்?

வாளியிலுள்ள நீரைக் குறுகலான உருளை வடிவக் கண்ணாடிக் கலனில் ஊற்றி அளக்க முற்படுவதுதான் உத்தமம். இந்தக் கண்ணாடிக் கலனில் நீர் அதிக உயரத்துக்கு எழுந்துவிடும், கண்ணாடியின் மூலம் நீரின் மட்டம் கண்ணுக்குத் தெரியும். மெய்தான், இந்தக் குறுகலான கண்ணாடி உருளையில் நிற்கும் நீரின் ஆழமல்ல நமக்கு வேண்டிய ஆழம். ஆனால் இந்த ஆழத்தை நமக்கு வேண்டிய ஆழமாய் எளிதில் மாற்றிக் கணக்கிட்டுக்கொண்டுவிட முடியும். குறுகிய உருளையின் அடிமட்டத் தளத்தினது விட்டம் நமது வாளியின் விட்டத்தை விட பத்து மடங்கு சிறிதாய் இருந்தால், உருளையின் அடிப் பரப்பு வாளியின் அடிப் பரப்பை விட $10 \times 10 = 100$ மடங்கு சிறிதாய் இருக்கும். கண்ணாடி உருளையில் நீரின் மட்டம் வாளியில் இருப்பதைவிட 100 மடங்கு உயரமாய் இருக்குமென்பது விளங்குகிறது. ஆகவே வாளியில் 2 மில்லிமீட்டர் மழை நீர் இருந்தால், கண்ணாடி உருளையில் 200 மில்லிமீட்டர், அதாவது 20 சென்டிமீட்டர் இருக்கும்.

வாளி மழைமானியைவிட கண்ணாடி உருளை மிக அதிக அளவுக்குக் குறுகலாய் இருக்கக் கூடாது என்பதும் இந்தக் கணக்கீட்டிலிருந்து தெரிய வருகிறது. ஏனென்றால் அப்படி இருக்குமானால், மழை நீரின் ஆழத்தை அளக்க நமக்கு மிகமிக உயரமான கண்ணாடி உருளை வேண்டியதாயிருக்கும். ஐந்து மடங்கு குறுகலான கண்ணாடி உருளை பொருத்தமாயிருக்கும்: இதன் அடிப் பரப்பு வாளியினுடையதைவிட 25 மடங்கு சிறிதாய் இருக்குமாதலால், நீர் மட்டம் இதில் 25 மடங்கு கூடுதலான உயரமுடையதாய் இருக்கும். வாளியில் நீரின் ஒவ்வொரு மில்லிமீட்டர் உயரமும் கண்ணாடி உருளையில் 25 மில்லிமீட்டர் உயரத்துக்குச் சமமாயிருக்கும். கண்ணாடி உருளையின் வெளிப் புறத்தில் நீள்வரிக் காகிதப் பட்டையை ஒட்டி

அதை 25-மில்லிமீட்டர் கூறுகளாய்ப் பகுத்துக் கோடுகளிட்டு இக்கோடுகளில் அடியிலிருந்து 1, 2, 3... என்று குறித்துக் கொள்வோமாயின் வசதியாய் இருக்கும். கண்ணாடி உருளையில் நீரின் உயரத்தைப் பார்த்ததும், கணக்குப் போட்டு மாற்ற வேண்டிய தேவையின்றி, மழைமானி வாளியில் இந்நீருக்குரிய உயரத்தை உடனே தெரிந்து கொண்டுவிடலாம். கண்ணாடி உருளையின் அடிப்பரப்பு வாளியினுடையதை விட ஐந்து மடங்குக்குப் பதிலாய் நான்கு மடங்கு குறைவாய் இருந்தால், காகிதப் பட்டையில் கூறுக் கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள தூரம் 25 மில்லிமீட்டருக்குப் பதிலாய் 16 மில்லிமீட்டர் இருக்க வேண்டும்.

வாளியிலிருந்து நீரைக் குறுகலான கண்ணாடிக் கலனுக்குள் சேதமின்றி ஊற்றுவது கடினமாகவே இருக்கும். இதைச் சமாளிக்க ஒரு சிறந்த வழி வருமாறு: வாளியின் பக்கவாட்டில் துளையிட்டுக் கண்ணாடிக் குழலைப் பொருத்திக் குழாயிலிருந்து தண்ணீர் பிடிப்பது போல் இதிலிருந்து நீரை வேண்டும் போது வெளிவரச் செய்யலாம்.

இவ்விதம் இப்போது நாம் மழை நீரின் ஆழத்தை அளப்பதற்கு வேண்டிய சாதனத்தைத் தயாரித்துக் கொண்டு விட்டோம். இந்த வாளியும் மழை நீர் அளவுக் கலனும் மெய்யான மழைமானியையோ, வானிலை நிலையங்களிலுள்ள அளவுக்கூறுக் கண்ணாடிக் கலனையோ போல் அவ்வளவு சரி நுட்பமானவை அல்ல என்பது மெய்தான். எனினும் குறைந்த செலவில் தயாரிக்கப்பட்ட நமது எளிய சாதனத்தின் துணை கொண்டு அறிவூட்டும் பல கணிப்புகளையும் செய்யலாம்.

இதோ சில உத்திக் கணக்குகள்.

87. பெய்த மழை எவ்வளவு?—

உங்கள் வீட்டுக்குப் பின்னால் 40 மீட்டர் நீளமும் 24 மீட்டர் அகலமும் கொண்ட ஒரு தோட்டம் இருக்கிறது. மழை பெய்து இப்போதுதான் ஓய்ந்திருக்கிறது. இந்தத் தோட்டத்திற்குக் கிடைத்த நீர் எவ்வளவு என்று தெரிந்து கொள்ள விரும்புகிறீர்கள். இதை எப்படிக் கணக்கிடுவது?

மழை நீரின் ஆழத்தை முதலில் நிர்ணயித்துக் கொண்டாக வேண்டும். இந்த ஆழம் தெரியவில்லையெனில் எந்தக் கணக்கும் போட வழியில்லை. வீட்டில் தயாரிக்கப்பட்ட உங்கள் மழைமானி 4 மில்லிமீட்டர் மழை நீர் கிடைத்திருப்ப

தாய்க் காட்டுகிறது என்று வைத்துக் கொள்வோம். அடுத்தபடி தோட்டத்தில் ஒவ்வொரு சதுர மீட்டரிலும் நிற்கும் மழை நீர் (மண்ணுல் இது உட்கொள்ளப் படவில்லையெனக் கொள்கிருேம்) எவ்வளவு என்று கணக்கிட்டுப் பார்ப்போம். ஒரு சதுர மீட்டர் என்பது 100 சென்டிமீட்டர் நீளமும் 100 சென்டிமீட்டர் அகலமும் கொண்ட பரப்பாகும். இதன் மீது 4 மில்லிமீட்டர் (அதாவது 0.4 சென்டிமீட்டர்) உயரத்துக்கு மழை நீர் விழுகிறது. இந்த அளவு நீரின் கனபரிமாணம்

$$100 \times 100 \times 0.4 = 4{,}000 \text{ கன சென்டிமீட்டர்.}$$

1 கன சென்டிமீட்டர் நீரின் எடை 1 கிராம் என்று நமக்குத் தெரியும். ஆகவே தோட்டத்தின் ஒவ்வொரு சதுர மீட்டரிலும் 4,000 கிராம், அதாவது 4 கிலோகிராம் நீர் விழுகிறது. தோட்டத்தின் பரப்பளவு:

$$40 \times 24 = 960 \text{ சதுர மீட்டர்.}$$

எனவே தோட்டத்துக்குக் கிடைக்கும் மழை நீரின் எடை:

$$4 \times 960 = 3{,}840 \text{ கிலோகிராம்,}$$

அதாவது 4 டன்களுக்குக் கொஞ்சம் குறைவானது.

வேடிக்கைக்காக வேண்டி, இந்த மழை நீருக்குச் சமமான அளவில் நீங்கள் தோட்டத்துக்கு நீர் இறைத்து ஊற்ற எத்தனை வாளி கொண்டு வர வேண்டுமென்று கணக்கிட்டுப் பாருங்கள். சாதாரண வாளி சுமார் 12 கிலோகிராம் நீர் பிடிக்கும். எனவே மழையின் மூலம் உங்களுடைய தோட்டத்துக்கு $3{,}840 \div 12 = 320$ வாளித் தண்ணீர் கிடைத்தது.

சுமார் 15 நிமிடங்களில் பெய்த மழையின் நீரை உங்கள் தோட்டத்துக்கு நீங்கள் கொண்டு வந்து ஊற்றுவதெனில் 300 வாளிக்கும் அதிகமான நீரை நீங்கள் கொண்டு வர வேண்டும்.

தாரையாய்க் கொட்டும் மழையையோ, தூறும் மழையையோ எண்களில் சொல்ல முடியுமா? இதற்கு ஒரு நிமிடத்தில் எத்தனை மில்லிமீட்டர் மழை பெய்தது என்று நிர்ணயித்தாக வேண்டும். ஒவ்வொரு நிமிடமும் 2 மில்லிமீட்டர் மழை நீர் விழுமாயின் அது கனத்த மழையாகிவிடும்.

இலையுதிர் காலத் தூறலாய் இருப்பின், 1 மில்லிமீட்டர் மழை நீர் சேர்வதற்கு சாதாரணமாய் ஒரு மணி நேரம் வேண்டி யிருக்கும், சில சமயம் இன்னுங்கூட அதிக நேரம் வேண்டி யிருக்கும்.

ஆக, மழைநீரின் ஆழத்தை அளப்பது சாத்தியமே என் பதோடு, எளியதுங்கூட. இது மட்டுமின்றி, வேண்டுமானல் மழைத் துளிகளின்* எண்ணிக்கையையுங்கூட குத்துமதிப் பாய் நிர்ணயித்துச் சொல்ல முடியும். சாதாரண மழையின் போது ஒரு கிராம் நீருக்குச் சராசரியாய் 12 துளிகள் விழு கின்றன. ஆகவே நாம் மேலே குறிப்பிட்ட மழையின் போது ஒரு சதுர மீட்டருக்கு

$4{,}000 \times 12 = 48{,}000$ துளிகள் வீதம் விழுகின்றன.

தோட்டம் பூராவிலும் விழுந்த மழைத் துளிகளின் எண் ணிக்கையைக் கணக்கிடுவதுங்கூட சுலபம்தான். இம்மாதிரி யான கணக்கீடுகள் சுவையாய் இருப்பினும் பயனில்லாதவை. வழிமுறைகள் தெரிந்திருக்குமாயின் நம்புவதற்கரிய கணக்கீடு களையுங்கூட செய்து காட்ட முடியமென்பதைத் தெரியப்படுத் தும் பொருட்டே இங்கே இவற்றை நான் குறிப்பிட்டேன்.

88. பெய்த வெண்பனி எவ்வளவு?—

மழை நீரின் ஆழத்தை அளக்கத் தெரிந்து கொண்டோம். ஆலங்கட்டி மழை பெய்யும் போது நீரின் ஆழத்தைக் கணக் கிடுவது எப்படி? மேற்கூறிய அதே வழியில் இதைக் கணக் கிடலாம். ஆலங்கட்டிகள் உங்களது மழை மானியுள் விழுந்து கரைந்து போகின்றன. அதன் பிறகு நீரின் ஆழத்தை அள விடுங்கள்.

ஆனல் வெண் பனி நீரை இப்படி அளக்க முடியாது. நமது மழைமானி இப்போது சரியான விவரத்தைத் தெரிவிப்ப தில்லை, ஏனெனில் வெண் பனியில் ஒரு பகுதி வாளியினுள் விழ முடியாதபடி காற்று அதை அடித்துச் சென்றுவிடுகிறது. ஆனல் இங்கே நாம் மழைமானி இல்லாமலே வெண்பனி நீரின் ஆழத்தை நிர்ணயம் செய்யலாம். வெளியிலோ, வயலிலோ விழுந்த வெண்பனியின் ஆழத்தை மரக் கோலைக்

---

* மழை எப்போதும்—கொட்டும் மழை என்பதாய் நாம் நினைக்கும் போதுகூட—துளிகளாகவே பெய்கிறது.

கொண்டு நாம் அளக்கலாம். வெண்பனி உருகியதும் நீரின் ஆழத்தைக் கண்டுபிடிக்க நாம் ஒரு சோதனை நடத்தியாக வேண்டும். அதே அளவுக்குப் பொசபொசப்பான வெண்பனியை ஒரு வாளியில் நிரப்பி அது உருகியதும் நீரின் ஆழத்தை அளக்க வேண்டும். இவ்விதம் ஒரு சென்டிமீட்டர் வெண்பனியிலிருந்து எத்தனை மில்லிமீட்டர் நீர் கிடைக்குமென்று நீங்கள் தெரிந்து கொள்ளலாம். இது தெரிந்ததும் வெண்பனியின் ஆழத்தை நீரின் ஆழமாய் எளிதில் மாற்றிவிடலாம்.

நாள் தவறாமல் வெப்ப காலங்களில் மழை நீரின் ஆழத்தை அளந்து சென்று, குளிர் காலத்தில் வெண்பனியின் ஆழத்தை மாற்றிப் பெறப்படும் நீரின் ஆழத்தையும் சேர்த்துக் கூட்டினால் நீங்கள் வசிக்கும் இடத்தில் வருடாந்தர நீர்ப்படிவு அளவைத் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

சோவியத் நகரங்கள் பலவற்றின் சராசரி நீர்ப்படிவு அளவுகள் வருமாறு:

லெனின்கிராது . . .	47	சென்டிமீட்டர்
வோலொக்தா . . .	45	,,
அர்ஹான்கெல்ஸ்க் . .	41	,,
மாஸ்கோ	55	,,
கோஸ்திரமா	49	,,
கஸான்	44	,,
கூய்பிஷேவ்	39	,,
ஓரென்பரக்	43	,,
ஒதெஸ்ஸா	40	,,
ஆஸ்திரஹான் . . .	14	,,
குத்தயீசி	179	,,
பாக்கூ	24	,,
ஸ்வெர்திலோவ்ஸ்க் . .	36	,,
தொபோல்ஸ்க் . . .	43	,,
செமிப்பளாத்தின்ஸ்க் .	21	,,
அல்மா-அத்தா . . .	51	,,
தாஷ்கெந்து	31	,,
எனிசேய்ஸ்க்	39	,,
இர்க்கூத்ஸ்க்	44	,,

இந்த நகர்களில் ஆகாயத்திலிருந்து மிக அதிகமாய் நீர் பெறுவது குத்தயீசி (179 செ. மீ.), மிகக் குறைவாய்ப் பெறுவது ஆஸ்திரஹான் (14 செ. மீ.). குத்தயீசியைவிட ஆஸ்திரஹான் 13 மடங்கு குறைவாய்ப் பெறுகிறது. ஆனால் குத்தயீசியைக் காட்டிலும் மிக அதிகமான நீர்ப்படிவு கொண்ட

இடங்களும் உலகில் இருக்கின்றன. உதாரணமாய், மழைநீரால் மெய்யாகவே மூழ்க்கடிக்கப்படும் ஓர் இடம் இந்தியாவில் இருக்கிறது—செரப்புஞ்சி எனப்படும் இவ்விடத்தில் வருடாந்தர மழையின் அளவு 1,260 சென்டிமீட்டர், அதாவது 12.5 மீட்டருக்கும் அதிகம்! இங்கு 100 சென்டிமீட்டருக்கும் அதிகமான மழை ஒரே நாளில் பெய்தது. ஆஸ்திரஹானைவிட மிகக் குறைந்த அளவில் மழை பெறும் இடங்களும் இருக்கின்றன —உதாரணமாய், சில்லியில் ஓர் ஆண்டு முழுதிலும் பெய்யும் மழையின் அளவு 1 சென்டிமீட்டருக்கும் குறைவானது.

ஆண்டிற்கு 25 சென்டிமீட்டருக்குக் குறைவான மழை பெறுகிறவை வறட்சிப் பிரதேசங்களாகும், இங்கு செயற்கைப் பாசனமில்லாமல் பயிர்த்தொழில் நடைபெற முடியாது.

உலகின் பல பகுதிகளிலும் வருடாந்தர மழையின் அளவை அளந்து குறித்தபின், அனைத்து உலகுக்குமான வருடாந்தரச் சராசரியைக் கணக்கிடலாம். உலகின் நிலப் பரப்பில் வருடாந்தரச் சராசரி மழை 78 சென்டிமீட்டர். நிலத்தில் பெய்யும் மழைக்கு ஏறத்தாழ சமமான அளவில் கடல்களிலும் பெய்கிறது. ஆகவே புவிப்பரப்பு பூராவிலும் மழை, ஆலங்கட்டி, வெண்பனி முதலான பல வடிவங்களிலும் பெறப்படும் நீர்ப்படிவின் அளவைக் கணக்கிடுவது கடினமல்ல. இதற்கு புவிப்பரப்பு எவ்வளவு என்பது நமக்குத் தெரிந்தாக வேண்டும். இது தெரியாவிடில், பின்வருமாறு இதைக் கணக்கிடலாம்.

பூமியின் சுற்றளவில் ஒரு மீட்டர் தூரம் பெருமளவுக்குக் கருராய் 1/4,00,00,000 பங்காகும். அதாவது பூமியின் சுற்றளவு 4,00,00,000 மீட்டர், அல்லது 40,000 கிலோமீட்டர் ஆகும். வட்டத்தின் விட்டம் அதன் சுற்றளவைக் காட்டிலும் ஏறத்தாழ $3\frac{1}{7}$ மடங்கு குறைவானது. இதிலிருந்து பூமியின் விட்டத்தைக் கணக்கிடுகிறோம்:

$$40{,}000 \div 3\frac{1}{7} \approx 12{,}700 \text{ கிலோமீட்டர்.}$$

ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பைக் கணக்கிடுவதற்கான விதி வருமாறு: விட்டத்தை முதலில் அதனாலும் பிறகு $3\frac{1}{7}$ ஆலும் பெருக்க வேண்டும். ஆகவே நமது புவியின் பரப்பு

$12,700 \times 12,700 \times 3\frac{1}{7} = 50,90,00,000$ சதுர கிலோமீட்டராகும்.

(இந்த விடையில் நான்காவது இலக்கத்திலிருந்து தொடங்கி சுன்னங்களாய்க் குறித்துக் கொள்கிறோம், ஏனெனில் முதல் மூன்று இலக்கங்கள் மட்டுமே சரியாய் நிர்ணயிக்கப் பட்டவை.)

ஆகவே, புவிப்பரப்பு 50 கோடி 90 லட்சம் சதுர கிலோ மீட்டர் என்றாகிறது.

இனி நமது கணக்கீட்டுக்குத் திரும்புவோம். முதற்கண் புவிப்பரப்பின் ஒவ்வொரு சதுர கிலோமீட்டருக்குமான மழைநீரின் அளவைக் கணக்கிடுகிறோம். 1 சதுர மீட்டர், அல்லது 10,000 சதுர சென்டிமீட்டருக்கான மழைநீர்:

$$78 \times 10,000 = 7,80,000 \text{ கன சென்டிமீட்டர்.}$$

ஒரு சதுர கிலோமீட்டரில் $1,000 \times 1,000 = 10,00,000$ சதுர மீட்டர்கள் இருக்கின்றன. எனவே 1 சதுர கிலோ மீட்டருக்கான மழைநீரின் அளவு:

78,000,00,00,000 கன சென்டிமீட்டர், அல்லது 7,80,000 கன மீட்டர்.

புவிப்பரப்பு அனைத்துக்குமான மழைநீரின் அளவு:

$7,80,000 \times 50,90,00,000 = 3,97,00,000,00,00,000$ கன மீட்டர்.

இதைக் கன கிலோமீட்டர் ஆக்குவதற்கு $1,000 \times 1,000 \times 1,000$ அதாவது 100 கோடியால் வகுக்க வேண்டும். நமக்குக் கிடைப்பது 3,97,000 கன கிலோ மீட்டர்.

இவ்வாறு நமது பூமிக்கு வளிமண்டலத்திலிருந்து கிடைக்கும் நீரின் வருடாந்தரச் சராசரி அளவு (முழு எண்ணில்) 4,00,000 கன கிலோமீட்டர் ஆகும்.

மழையையும் பனியையும் அளப்பது பற்றிய நமது சிற்றுரையை இத்துடன் முடித்துக் கொள்வோம். வானிலை பற்றிய புத்தகங்களில் இது குறித்து நீங்கள் மேலும் விவரமாய்த் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

தண்ணீரும் மழையும்


2536000040
135 22,5 4510
9012 3040
3500 2,6/500
1000 13000 14006
2,5 91203
00015
130001501
9120304010
14000 160001
3500 025 9120401
13000 3600010
13000 14001600011
000 3600 13000

89. **பிரளயம்.—**

முன்னொரு காலத்தில் அல்லும் பகலும் அடை மழை பெய்து உலகில் வெள்ளம் பெருகி உயரமான மலைகளை எல்லாம் மூழ்க்கடித்ததாய் விவிலியம் கூறுகிறது. ''பூமியில் மனிதனை ஏன் படைத்தோமென ஆண்டவர் மனம் கடிந்து கொண்டார்'' என்கிறது அது.

''நான் உண்டாக்கிய மனிதனைப் பூமியில் இல்லாமல் அழித்திடுவேன்'' என்று ஆண்டவர் சொன்னார். ''மனிதனையும் விலங்கையும் ஊர்வதையும் காற்றிலே பறக்கும் பறவையையும் அழித்திடுவேன்'' என்றார்.

குற்றமற்றவனாகிய நோவா ஒருவனை மட்டும்தான் ஆண்டவர் அழிக்காது விட விரும்பினார். உலகம் அழியப் போகிறதென்று ஆண்டவர் அவனை எச்சரிக்கை செய்து, 300 முழம் நீளமும் 50 முழம் அகலமும் 30 முழம் உயரமும் கொண்ட ஒரு கப்பலை மரத்தினால் செய்து கொள்ளும்படி அவனிடம் சொன்னார். அந்தக் கப்பலில் மூன்று அடுக்குகள் இருந்தன, நோவாவையும் அவன் குடும்பத்தையும் வயது வந்த அவனது பிள்ளைகளின் குடும்பங்களையும் மட்டுமின்றி, ஒவ்வோர் உயிர் வகையையும் அழிவிலிருந்து காப்பாற்றுவதற்கான கப்பல் அது. உலகிலுள்ள ஒவ்வோர் உயிர் வகையிலும் ஒரு சோடியை இந்தக் கப்பலுக்குள் அழைத்துச் சென்று நீண்டதொரு காலத்துக்குச் சாப்பாட்டுக்கு வேண்டியவற்றையும் சேர்த்து வைத்துக் கொள்ளுமாறு நோவாவுக்கு ஆண்டவர் கட்டளையிட்டார்.

உலகில் உயிர் வாழ்கிறவை யாவற்றையும் அழித்திடும் பொருட்டு ஆண்டவர் ஒரு பிரளயத்தை உண்டாக்கினார். வெள்ளம் பெருகி எல்லா மனிதர்களையும் எல்லா விலங்குகளையும் அழித்திட ஏற்பாடு செய்தார். அதன் பிறகு நோவாவும் அவன் காப்பாற்றும் உயிர்களும் ஒரு புதிய மனித குலத்தையும் உயிரினங்களது ஒரு புதிய உலகையும் உண்டாக்கும்.

''ஏழு நாட்களுக்குப் பிற்பாடு அவ்வாறே நேரலாயிற்று'' என்று விவிலியம் கூறிச் செல்கிறது. ''பிரளயம் ஏற்பட்டு உலகிலே வெள்ளம் பெருகிற்று.... பூமியின் மேல் நாற்பது நாட்களுக்கு அல்லும் பகலும் விடாமல் மழை பெய்தது.... வெள்ளம் மேலும் மேலும் பெருகி கப்பலை மிதக்கச் செய்தது.... வெள்ள நீர் உலகெங்கும் உயர்ந்து எழுந்தது,

வானத்தை முட்டி நின்ற உயரமான மலைகள் எல்லாம் மூழ்கிவிட்டன. அவற்றுக்கும் மேலே பதினைந்து முழத்துக்கு உயர்ந்து நின்றது பெருக்கு.... பூமியில் சஞ்சரித்தவை யாவும் மடிந்தன, ஊரெல்லாம் ஒழிந்தது.... நோவா ஒருவன் மட்டும் கப்பலில் அவனுடன் இருந்தோரோடும் இருந்தவற்றோடும் தப்பிப் பிழைத்தான்.'' மேலும் நூற்றுப் பத்து நாட்களுக்கு இந்த வெள்ளம் பூமியின் மேல் நின்றிருந்தது, பிறகு அடங்கிற்று. அதன்பிறகு கப்பலை விட்டு நோவா வெளியே வந்தான், அவன் காப்பாற்றி வைத்திருந்த உயிர் வகைகள் எல்லாம் வெளியே வந்தன, உலகில் மீண்டும் உயிர்கள் பல்கிப் பெருகின.

இந்தப் பிரளயக் கதையிலிருந்து இரு கேள்விகள் எழுகின்றன:

1) எவ்வளவுதான் ஓயாமல் பெய்யும் கனத்த மழையாயினும் பூமியை வெள்ளம் மூடி மிக உயர்ந்த மலைகளை எல்லாம் மூழ்கடித்து மேலும் உயர்ந்தெழ முடியுமா?

2) நோவாவின் கப்பல் உலகிலுள்ள எல்லா உயிர் வகைகளிலும் ஒவ்வோர் சோடிக்கு இடம் தரும்படி அவ்வளவு பெரிதாய் இருந்திருக்க முடியுமா?

90. இந்தப் பிரளயம் சாத்தியமா?—

இரு கேள்விகளுக்கும் கணித வழியில் விடை காணலாம்.

பிரளய நீர் எங்கிருந்து வந்தது? வளிமண்டலத்திலிருந்து தான் வந்திருக்க வேண்டும். பிரளயத்துக்குப் பிற்பாடு இவ்வளவு நீரும் எங்கே போயிற்று? புவிப் பரப்பை மூழ்கடித்த உலகளாவிய அந்தப் பெருங் கடலின் நீர் மண்ணால் உட்கொள்ளப்பட்டு தரைக்கடியில் போயிருக்க முடியாது, வேறு எவ்வழியிலும் மறைந்திருக்க முடியாது—ஆவியாகி வளிமண்டலத்துக்குள் செல்வது ஒன்றுதான் வழி. பிரளய நீர் இப்போதும் அங்கேயேதான் இருந்து வர வேண்டும். ஆகவே வளிமண்டலத்திலுள்ள ஆவி எல்லாம் துளிகளாய் மாறி பூமியின் மீது விழுமாயின் மற்றொரு பிரளயம் உண்டாகி மிகவும் உயரமான மலைகளும் மூழ்க்கடிக்கப்பட்டாக வேண்டும். இது சாத்தியமா என்று பரிசீலிப்போம்.

வளிமண்டலத்தில் ஈரம் எவ்வளவு இருக்கிறது என்பதை வானிலை பற்றிய புத்தகங்கள் கூறுகின்றன. ஒவ்வொரு சதுர மீட்டர் பரப்புக்கு மேலும் உள்ள காற்றுத் தூணிலும் சரா

சரி 16 கிலோகிராம் ஆவி இருப்பதாகவும், ஒருபோதும் இது 25 கிலோகிராமுக்கு அதிகமில்லையெனவும் கூறுகின்றன. இந்த ஆவி நீராகி பூமியில் விழுந்தால் மழைநீரின் ஆழம் எவ்வளவு என்று கணக்கிட்டுப் பார்ப்போம். 25 கிலோகிராம் (அதாவது 25,000 கிராம்) நீரின் கனபரிமாணம் 25,000 கன சென்டிமீட்டர். 1 சதுரமீட்டர், அதாவது $100 \times 100 = 10{,}000$ சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பின் மீது நிற்கக்கூடிய நீரின் கனபரிமாணமாகும் இது. இந்தக் கனபரிமாணத்தை அடிப் பரப்பினுல் வகுத்தோமாயின் இந்நீரின் ஆழம் கிடைக்கிறது:

$$25{,}000 \div 10{,}000 = 2.5 \text{ சென்டிமீட்டர்.}$$

வெள்ளம் இந்த 2.5 சென்டிமீட்டருக்கு மேல் உயர்ந் திருக்க முடியாது, ஏனெனில் அதற்கு மேல் உயர்வதற்கு வளிமண்டலத்தில் நீர் இருந்திருக்காது.* இந்த உயரமுங் கூட மழை நீர் மண்ணுல் உட்கொள்ளப்படாமல் இருந்திருந் தால்தான் சாத்தியம்.

இப்படி ஒரு பிரளயம் ஏற்பட்டிருந்தாலுங்கூட வெள்ளம் 2.5 சென்டிமீட்டருக்கு மேல் உயர்ந்திருக்க முடியா தென்று நமது கணக்கீடு புலப்படுத்துகிறது. 2.5 சென்டி மீட்டர் உயரம் எங்கே, 9 கிலோமீட்டருக்கு நெடிதுயர்ந்து நிற்கும் எவரெஸ்டு சிகரத்தை மூழ்க்கடிக்கும்படியான உயரம் எங்கே? வெள்ளப் பெருக்கின் உயரத்தை விவிலியம் சற்று மிகைப்படுத்திச் சொல்கிறது... ஒன்றுக்கு 3,60,000 மடங் காய்.

அப்படிப் பிரளயம் உண்டாகும்படி மழை பெய்திருந் தாலுங்கூட, அது மெய்யான மழையாய் இருந்திருக்க முடி யாது. தூறலாகவே இருந்திருக்கும், ஏனெனில் 40 நாட் களுக்கு ஓயாமல் அல்லும் பகலுமாய்ப் பெய்த இம்மழை யின் அளவு 25 மில்லிமீட்டர்தான்—நாளொன்றுக்கு 0.5

---

* பல இடங்களில் மழை சில சமயம் 2.5 சென்டிமீட்ட ருக்கு அதிகமாய்ப் பெய்வது உண்டு. ஆனுல் இந்த மழை அவ்விடத்திற்கு நேர் மேலே இருக்கும் வளிமண்டலத்தி லிருந்து மட்டும் வருவதில்லை, சுற்றுப்புற இடங்களின் மேல் இருக்கும் வளிமண்டலத்திலிருந்து காற்றினுல் அடித்து வரப் பட்டதும் ஆகும். ஆனுல் விவிலியத்தின்படி ஒரே நேரத் தில் புவிப்பரப்பு அனைத்தும் பிரளயத்தால் மூழ்க்கடிக்கப் பட்டது. ஆகவே ஓரிடம் பிறிதொன்றிடமிருந்து ஈரத்தைக் ''கடன் வாங்கி'' இருக்க முடியாது.

மில்லிமீட்டருக்கும் குறைவானது. ஓயாமல் ஒரேயொரு நாளைக்கு நீடிக்கும் இலையுதிர் காலத் தூறலுங்கூட இதை விட 20 மடங்கு அதிகமான மழைநீரை அளிக்கக்கூடியது.

91. அம்மாதிரியான கப்பல் இருந்திருக்க முடியுமா?—

இனி இரண்டாவது கேள்வியை எடுத்துக் கொள்வோம்: நோவா காப்பாற்ற வேண்டியிருந்த அத்தனை ஜீவராசிகளுக்கும் அந்தக் கப்பலில் இடம் இருந்திருக்குமா?

கப்பலில் எவ்வளவு இடம் இருந்திருக்கும் என்று பார்ப்போம். விவிலியத்தின்படி நோவாவின் கப்பல் மூன்று அடுக்குகள் கொண்டது. ஒவ்வோர் அடுக்கும் 300 முழம் நீளமும் 50 முழம் அகலமும் உடையது. பண்டை மேற்காசிய மக்களது வழக்கில் ஒரு முழம் என்பது சுமார் 45 சென்டி மீட்டருக்கு (அதாவது 0.45 மீட்டருக்கு) சமமான நீட்டல் அளவை. மீட்டர் முறைக்கு மாற்றுவோமாயின் ஒவ்வோர் அடுக்கும்

$$300 \times 0.45 = 135 \text{ மீட்டர் நீளமும்}$$
$$50 \times 0.45 = 22.5 \text{ மீட்டர் அகலமும் உடையது.}$$

ஆகவே ஒவ்வோர் அடுக்கின் பரப்பு:

$$135 \times 22.5 = 3{,}040 \text{ சதுர மீட்டர் (முழு எண்ணில்).}$$

மூன்று அடுக்குகளிலுமாய்ச் சேர்த்து கப்பலில் இருந்த வாழ்விடத்தின் மொத்தப் பரப்பு:

$$3{,}040 \times 3 = 9{,}120 \text{ சதுர மீட்டர்.}$$

பாலூட்டிகளுக்கு மட்டுமாவது போதுமா இந்த இடம்? உலகில் ஏறத்தாழ 3,500 வகைகளைச் சேர்ந்த பாலூட்டிகள் உள்ளன. நோவா இந்தப் பாலூட்டிகளுக்கு மட்டும் இடம் அளித்தால் போதாது, வெள்ளம் அறவே வழிந்தோடுவதற்கு ஆகிய 150 நாட்களுக்கு இவற்றுக்குப் போதுமான தீனிக்கும் இடம் ஒதுக்கியாக வேண்டும். இவற்றில் வேட்டை விலங்குகளுக்கு அவற்றுக்கு மட்டுமின்றி, அவற்றின் வேட்டைக்குரிய பிராணிகளுக்கும் இந்தப் பிராணிகளுக்குத் தேவையான தீனிக்கும் இடம் வேண்டும்

என்பதை மறக்கலாகாது. இந்தப் பாலூட்டிகளில் ஒவ்வொரு சோடிக்கும் நோவாவின் கப்பலில் இருந்திருக்கக் கூடிய இடம்:

$$9{,}120 \div 3{,}500 = 2.6 \text{ சதுர மீட்டர்.}$$

நிச்சயமாய் இது போதாது; நோவாவுக்கும் அவனுடைய பெருங் குடும்பத்தாருக்கும் வேறு வாழ்விடம் வேண்டியிருந்திருக்கும், அதோடு கூண்டுக்குக் கூண்டு இடைவெளி அவசியமாய் இருந்திருக்கும் என்பதை நினைவில் கொள்வோமாயின் இடம் போதவே போதாதென்பது விளங்கும்.

இந்தப் பாலூட்டி உயிர்வகைகளை அன்னியில் மற்றும் மிகப் பல ஜீவராசிகளை நோவா எடுத்துச் செல்ல வேண்டியிருந்தது. பாலூட்டிகளைப் போல் அவ்வளவு பெரியவை அல்ல இவை, ஆனால் மிகப் பலதரப்பட்டவை. இவற்றின் எண்ணிக்கை குத்துமதிப்பாய்ப் பின்வருமாறு:

பறவைகள்	13,000
ஊர்வன	3,500
நீர்நில வாழ்வன . . .	1,400
சிலந்திப் பேரினத்தவை .	16,000
புழுப் பூச்சி இனத்தவை .	3,60,000

பாலூட்டிகளுக்கே இட நெருக்கடியெனில், ஏனைய உயிரினங்களுக்கு இடமே இருந்திருக்காது. உலகிலுள்ள உயிர்வகை ஒவ்வொன்றிலும் ஒரு சோடிக்கு இடமளிக்க வேண்டுமாயின் அந்தக் கப்பல் விவிலியம் கூறுவதைக் காட்டிலும் மிகப் பெரியதாய் இருந்திருக்க வேண்டும். விவிலியம் தரும் விவரங்களின்படி நோவாவின் கப்பல் மிகப் பெரியது தான்—மாலுமிகளது வழக்கில் சொல்வதெனில் அதன் இடக்கவர்வு எடை 20,000 டன். தொன்மை மிக்க அந்தக் காலத்தில், கப்பல் கட்டும் கலையின் பிள்ளைப் பருவமாகிய அந்நாட்களில், மக்கள் இவ்வளவு பிரம்மாண்ட பரிமாணங்களுக்குரிய கப்பல்களைக் கட்டத் தெரிந்தவர்களாய் இருந்தார்கள் என்பது நம்பத்தக்கதாய் இல்லை. நோவாவின் கப்பல் பெரியதே என்றாலும் அதற்குத் தரப்பட்டிருந்ததாய் விவிலியம் கூறும் பணியை நிறைவேற்றுவதற்கு தேவையான அளவுக்குப் பெரியதாய் இல்லை. ஒரு பெரிய விலங்கினக் காட்சிசாலையே ஐந்து மாதங்களுக்குப் போதுமான உணவுச்

சேமிப்புகளையும் எடுத்துக் கொண்டு நீரில் மிதிக்கத்தக்க வாறு அமைக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும்!

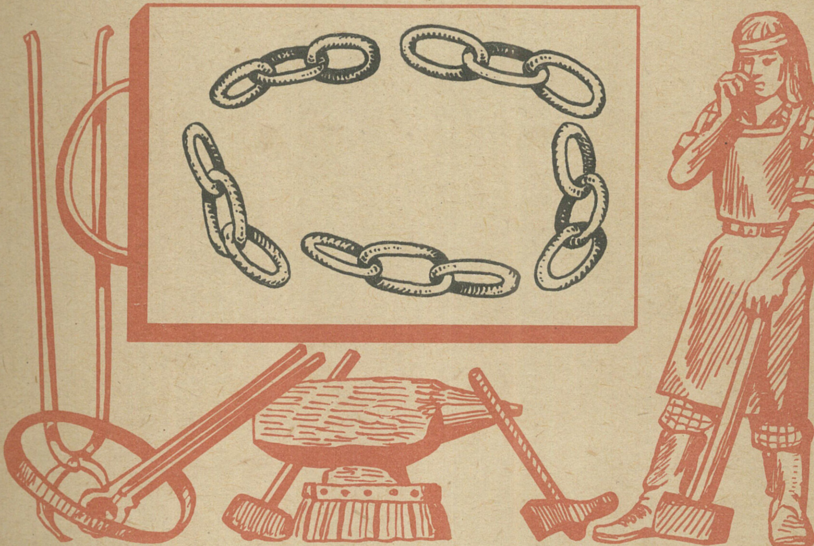
சுருங்கக் கூறுமிடத்து பிரளயத்தைப் பற்றிய இந்த விவிலியக் கதையைக் கணிதம் பொய்ப்பிக்கிறது. இம்மாதிரி உண்மையில் நடைபெற்றிருக்க முடியாது. அப்படி எதாவது நடைபெற்றிருந்தால் அது ஏதேனும் ஒரு மண்டலம் அல்லது மாநிலத்தில் ஏற்பட்ட வெள்ளமாகவே இருந்திருக்க வேண்டும்—எஞ்சிய விவரங்கள் எல்லாம் செழுமையான கற்பனையின் சிருஷ்டியே ஆகும்.

11

மதிநுட்பச் சோதனை


5 0 2
6 4 9
8 3 0
8

இந்தப் புத்தகம் வாசகருக்குப் பயனுடையதாய் இருந்திருக்கும், மனத்துக்கு இனிய பொழுதுபோக்காய் மட்டுமின்றி வாசகர் தமது மதிநுட்பத்தை வளர்த்துக் கொள்ளவும் தமது அறிவை நன்கு பயன்படுத்தவும் உதவி புரிந்



படம் 89. சங்கிலியின் ஐந்து துண்டுகள்.

திருக்குமென நினைக்கிறேன். வாசகர் தம்முடைய மதிநுட்பத்தைச் சோதித்துப் பார்த்துக் கொள்ள ஆசைப்படுவார். அவரது இந்த ஆசையைப் பூர்த்தி செய்யும் பொருட்டு, இந்தக் கடைசி அத்தியாயத்தில் வெவ்வேறு வகையான இருபத்தொன்பது உத்திக் கணக்குகளையும் புதிர்களையும் வகுத்தளிக்கிறேன்.

92. சங்கிலி.—

ஒவ்வொன்றிலும் மூன்று கரணைகளைக் கொண்ட சமமான ஐந்து துண்டுகளாய்த் துண்டிக்கப்பட்ட சங்கிலியை ஒருவர் எடுத்துவந்து கொல்லரிடம் தந்து ஒன்றாய் இணைத்துக் கொடுக்கச் சொல்கிறார்.

வேலையில் இறங்குமுன் கொல்லர் தாம் எத்தனை கரணை களை வெட்டி மீண்டும் ஒட்டிச் சேர்க்க வேண்டுமென்று ஆலேசித்துப் பார்க்கிறார். நான்கு கரணைகளை வெட்டுவ தென்று முடிவு செய்கிறார்.

இன்னும் குறைவான கரணைகள் வெட்டி மீண்டும் ஒட்டிச் சேர்த்து இவ்வேலையை முடிக்க முடியுமா?

93. சிலந்திகளும் வண்டுகளும்.—

ஒரு சிறுவன் 8 சிலந்திகளையும் வண்டுகளையும் பிடித்து ஒரு சிறு பெட்டியில் போடுகிறான். அவற்றின் கால்களை எண்ணிக் கணக்கிடுகிறான். மொத்தம் 54 கால்கள் இருந் தன.

சிறுவன் பிடித்த சிலந்திகள் எத்தனை, வண்டுகள் எத் தனை?

படம் 90. அவன் குறிப்பிட்டது எந்தக் கூடை?

94. மழையங்கி, தொப்பி, பொதியுறை.—

ஓராள் ஒரு மழையங்கியும் ஒரு தொப்பியும் ஒரு ஜதை மிதியடிப் பொதியுறையும் வாங்கிக் கொண்டு யாவற்றுக்குமாய் மொத்தம் 20 ரூபிள் கொடுக்கிறார். மழையங்கியின் விலை தொப்பியின் விலையைவிட 9 ரூபிள் அதிகம்; மழையங்கி, தொப்பி இவை இரண்டின் மொத்த விலை மிதியடிப் பொதியுறையின் விலையைவிட 16 ரூபிள் அதிகம். ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் அவர் கொடுத்த விலை என்ன?

சமன்பாடுகள் போட்டுப் பார்க்காமல் மனக் கணக்காகவே விடை காண வேண்டும்.

95. கோழி முட்டையும் வாத்து முட்டையும்.—

கோழிமுட்டைகளும் வாத்து முட்டைகளும் கூடைகளில் (படம் 90) இருக்கின்றன. ஒவ்வொரு கூடையிலும் இருக்கும் முட்டைகளின் எண்ணிக்கை கூடையில் குறிக்கப்பட்டிருக்கிறது. ''இந்தக் கூடையை விற்றேன் என்றால், என்னிடம் வாத்து முட்டைகளைப் போல் இரு மடங்கான கோழி முட்டைகள் இருக்கும்'' என்று விற்பவர் கூறிக் கொள்கிறார்.

எந்தக் கூடையை மனதிற் கொண்டு இவ்வாறு சொன்னார் அவர்?

96. விமானப் பயணம்.—

ஒரு விமானம் 1 மணி 20 நிமிடத்தில் Aயிலிருந்து Bக்குப் போகிறது; அங்கிருந்து திரும்பி வர 80 நிமிடம்தான் ஆகிறது. எப்படி இது?

97. பண அன்பளிப்புகள்.—

இரு தந்தையர் தம் புதல்வர்களுக்கு பண அன்பளிப்புகள் தந்தனர். ஒருவர் தம் புதல்வனுக்கு 150 ரூபிளும், மற்றொருவர் 100 ரூபிளும் கொடுத்தார்கள். இரு புதல்வர்களும் தம் கையிருப்புகளை எண்ணிப் பார்த்த போது, இருவரது கையிருப்புகளும் மொத்தத்தில் 150 ரூபிளே அதிகரித்திருக்கக் கண்டனர். எப்படி இது?

98. இரு டிராப்ட் காய்கள்.—

இரு டிராப்ட் காய்களை ஆட்டப் பலகையின் 64 கட்டங்களில் எவற்றில் வேண்டுமானாலும் வையுங்கள். வெவ்வேறான எத்தனை இணைவுகளில் அவற்றை வைக்க முடியும்?

99. இரு இலக்கங்கள்.—

இரண்டு இலக்கங்களைக் கொண்டு எழுதக் கூடிய மிகச் சிறிய முழுவெண் என்ன?

100. ஒன்று.—

பத்து இலக்கங்களில் யாவற்றையும் உபயோகித்து 1ஐ எழுதுங்கள்.

101. ஐந்து 9கள்.—

ஐந்து 9களைக் கொண்டு 10ஐ எழுதுங்கள்.

இதைக் குறைந்தது இரண்டு வழிகளிலாவது செய்து காட்டுங்கள்.

102. பத்து இலக்கங்கள்.—

பத்து இலக்கங்களில் யாவற்றையும் உபயோகித்து 100ஐ எழுதுங்கள். இதைச் செய்ய எத்தனை வழிகள் உள்ளன? நான்குக்கு குறையாத வழிகளை நாம் அறிவோம்.

103. நான்கு வழிகள்.—

ஒரே மாதிரியான ஐந்து இலக்கங்களைக் கொண்டு 100ஐ எழுதுவதற்குரிய வெவ்வேறான நான்கு வழிகளைக் காட்டுங்கள்.

104. நான்கு 1கள்.—

நான்கு 1களைக் கொண்டு எழுதக் கூடிய மிகப் பெரிய எண் எது?

105. மர்ம வகுத்தல்.—

அடியிற் கண்ட வகுத்தலில் நான்கு 4களைத் தவிர ஏனைய எல்லா இலக்கங்களும் * குறியிட்டுக் காட்டப்படுகின்றன. தெரியாத இந்த இலக்கங்களை ஊகித்துக் குறியுங்கள்.

```
***) ******4 (*4**
    —***
     ----
     **4*
    —****
     -----
      ****
    —  *4*
      -----
       ****
    —  ****
       ----
```

பல வழிகளில் இதற்குத் தீர்வுகாணலாம்.

106. இன்னொரு வகுத்தல்.—

இதே விதமான இன்னொரு வகுத்தலில் ஏழு 7களைத் தவிர ஏனைய இலக்கங்கள் ஊகித்துக் குறிக்கப்பட வேண்டியவை:

```
****7*) **7******* (**7**
        ******
        ------
        *****7*
        *******
        --------
          *7****
          *7****
        --------
          *******
          ****7**
        ----------
           ******
           ******
           -------
```

107. நீளம் எவ்வளவு?—

ஒரு சதுர மீட்டரில் இருக்கும் எல்லா மில்லிமீட்டர் சதுரங்களையும் ஒன்றையடுத்து ஒன்ருய் நீள்வரிசையில் வைத்தால் இவ்வரிசையின் நீளம் எவ்வளவு என்று மனக்கணக்காய்க் கணித்துச் சொல்லுங்கள்.

108. உயரம் எவ்வளவு?—

ஒரு கன மீட்டரில் இருக்கும் எல்லாக் மில்லிமீட்டர் கன சதுரங்களையும் ஒன்றின்மீது ஒன்ருய் அடுக்கிச்சென்ருல் இந்தக் கம்பத்தின் உயரம் எவ்வளவு என்று மனக் கணக்காய்க் கணித்துச் சொல்லுங்கள்.

109. விமானம்.—

12 மீட்டர் இறக்கை வீச்சுடைய ஒரு விமானம் நேரே தலைக்கு மேல் பறந்தபோது புகைப்படம் பிடிக்கப்பட்டது. புகைப்படக் காமிராவின் ஆழம் 12 சென்டிமீட்டர். புகைப்படத்தில் விமானம் 8 மில்லிமீட்டர் இறக்கை வீச்சுடையதாய் இருந்தது.

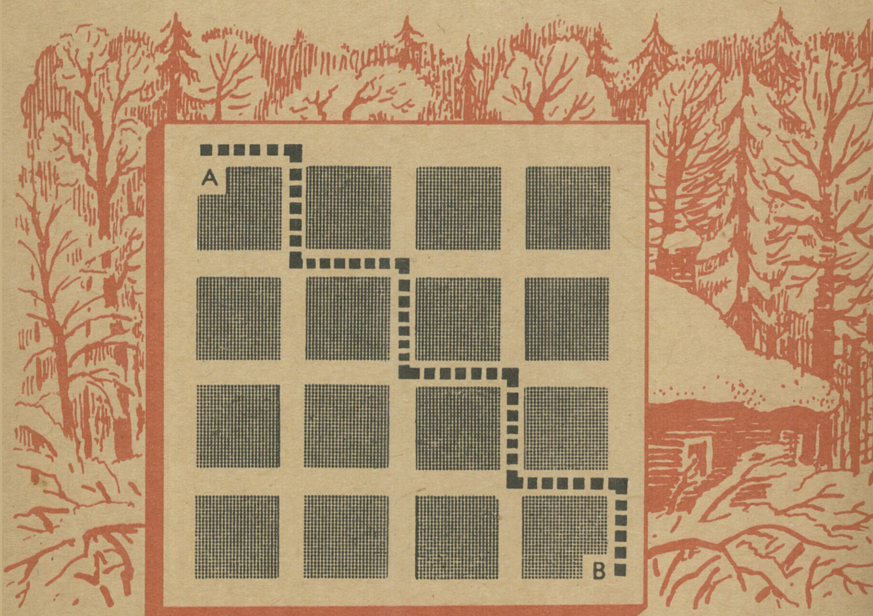
படம் பிடிக்கப்பட்ட போது விமானம் எவ்வளவு உயரத்தில் பறந்தது?

110. பத்துலட்சம் பண்டம்.—

ஒரு பண்டத்தின் எடை 89.4 கிராம். இம்மாதிரிமான பத்துலட்சம் பண்டங்களின் எடை எத்தனை டன் என்று மனக் கணக்காய்ப் போட்டுச் சொல்லவும்.

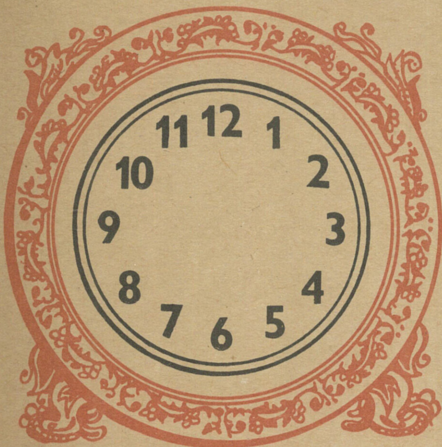
111. வழிகள் எத்தனை?—

ஒரு காடு நடைபாதைகளால் சதுரத் திட்டுகளாய் பிரிக்கப்பட்டிருப்பதைப் படம் 91 காட்டுகிறது. A என்னும் புள்ளியிலிருந்து B என்னும் புள்ளிக்கு ஒருவர் செல்லும் பாதை புள்ளிக் கோடிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளது. இந்த



படம் 91. காட்டைச் சதுரங்களாய்ப் பிரிக்கும் பாதைகள்.

ஒரு வழியில் மட்டுமின்றி இன்னும் பல வழிகளிலும் அவர் ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்றொன்றுக்குப் போய்ச் சேர்ந்திருக்கலாம். இதே நீளமுள்ள வெவ்வேறு வழிகள் எத்தனை இருக்கின்றன?



படம் 92. கடிகார முகப்பை ஆறு துண்டுகளாய்வெட்டுங்கள்.

112. கடிகார முகப்பு.—

படம் 92ல் காட்டப்படும் கடிகார முகப்பை எந்த வடிவத்திலுமான 6 துண்டுகளாய்ப் பிரிக்க வேண்டும், ஆனுல் ஒவ்வொரு துண்டிலும் எண்களின் கூட்டுத் தொகை மாறக் கூடாது.

உங்களுடைய சாமர்த்தியத்தையும் மதிநுட்பத்தையும் சோதிப்பதற்கான ஒரு பரீட்சை இது.

113. எட்டுமுனே நட்சத்திரம்.—

படம் 93ல் இருக்கும் எட்டுமுனே நட்சத்திரத்தில் கோடுகள் வெட்டுமிடங்களில் உள்ள வட்டங்களில் 1லிருந்து 16 வரையுள்ள எண்களைக் குறிக்க வேண்டும், சதுரத்தின் ஒவ்வொரு பக்கத்தின் எண்களது கூட்டுத் தொகையும், சதுரத்தின் முனேகளிலுள்ள எண்களது கூட்டுத் தொகையும் 34 வர வேண்டும்.

114. எண்களின் சக்கரம்.—

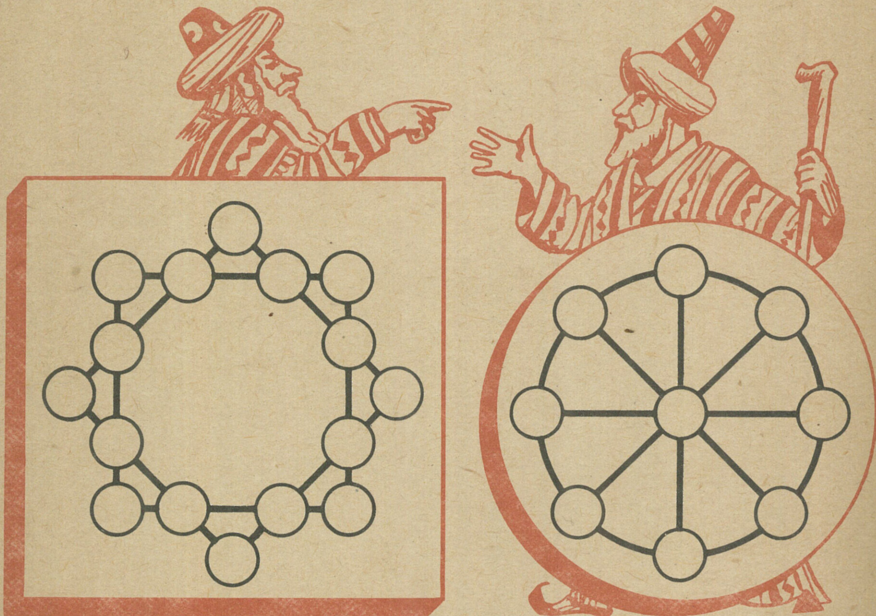
படம் 94ல் 1லிருந்து 9வரையிலான எண்களை மையத்தில் ஒன்றும் விட்டங்களது முனேகளில் ஏனேயவும் வரும்படி எழுத வேண்டும், ஒவ்வொரு விட்டத்திலுமுள்ள மூன்று எண்களது கூட்டுத் தொகை 15ஆக இருக்க வேண்டும்.

115. முக்காலி.—

முக்காலியின் மூன்று கால்கள் வெவ்வேறு நீளமுடையனவாய் இருக்கும் போதுகூட முக்காலி நொடிக்காமல் உறுதியாய் நிற்குமெனச் சொல்கிருர்கள். இது சரிதானு?

116. கோணங்கள்.—

படம் 95ல் கடிகார முட்களால் அமைக்கப்படும் கோணங்களின் பாகை அளவு எவ்வளவு? பாகை மானியை உபயோகிக்காமல் மனக்கணக்காய்க் கணித்துச் சொல்லுங்கள்.

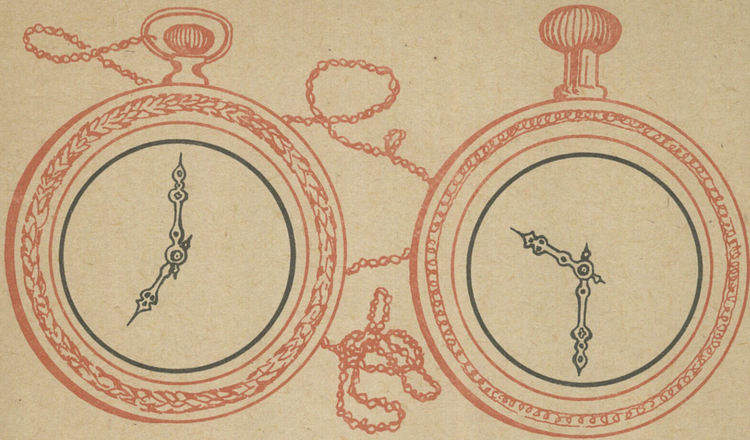


படம் 93. எட்டு முனை நட்சத்திரம். படம் 94. எண்களின் சக்கரம்.

117. பூமி மையவரையில்.—

பூமியை அதன் மையவரையில் நடந்து சுற்றிவர முடியுமெனக் கொள்வோம். அப்போது நமது உச்சந் தலை வரையும் வட்டத்தின் சுற்றளவு நமது பாதங்கள் வரையும் வட்டத்தின் சுற்றளவைக் காட்டிலும் அதிகமாய் இருக்கும்.

எவ்வளவு அதிகமாய் இருக்கும்?



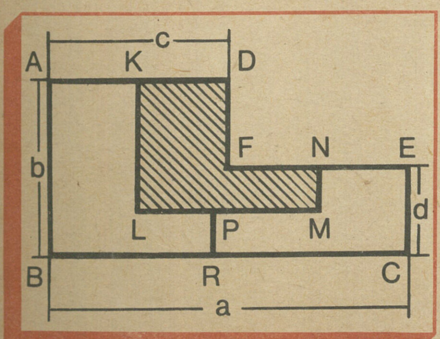
படம் 95. கோணங்கள் எவ்வளவு பெரியவை?

118. ஆறு வரிசைகள்.—

பத்து லாய அறைகளில் ஒன்பது குதிரைகளை விட்டு வைதததது பற்றிய தமாஷைப் பற்றிக் கேட்டிருப்பீர்கள். வெளிப் பார்வைக்கு இதை ஒத்ததாய்த் தோன்றினுலும் உண்மையில் தீர்வு காணக் கூடிய புதிர் ஒன்று வருமாறு:

24 பேரை வரிசைக்கு 5 பேர்வீதம் 6 வரிசைகளில் நிற்கவையுங்கள்.

119. வகுப்பது எப்படி?—



படம் 96. மூன்று சம பாகங்களாய்ப் பிரியுங்கள்.

படம் 96ல் காணப்படும் உருவம், கால் பங்கு பரப்பு வெட்டி விலக்கப்பட்ட ஒரு செவ்வகமாகும். இதை நான்கு சம பாகங்களாய்ப் பிரிக்கச் சொல்லும் பிரபல புதிர் ஒன்று இருக்கிறது. ஆனுல் நீங்கள் இதை மூன்று சம பாகங்களாய்ப் பிரிக்க வேண்டும். இது சாத்தியமா?

120. சிலுவையும் பிறையும்.—

படம் 97ல் ஒரு பிறையைப் பார்க்கிறீர்கள். இந்தப் பிறையின் பரப்பளவுக்கு வடிவகணித வழியில் சமமான பரப்பளவு கொண்ட சிலுவை ஒன்றை வரைய முடியுமா?

படம் 97. பிறையிலிருந்து சிலுவை செய்வது எப்படி?

பதில்கள் 92-120

92. மூன்று கரணைகளை மட்டும், அதாவது ஒரு துண்டின் கரணைகளை மட்டும் வெட்டி ஏனைய நான்கு துண்டுகளின் முனைகளை இவற்றால் இணைத்து இவ்வேலையைச் செய்துவிடலாம்.

93. இதற்கு விடை காண்பதற்கு சிலந்திக்கும் வண்டுக்கும் எத்தனை கால்கள் என்று தெரிந்திருக்க வேண்டும். உயிரியல் பாடங்களில் படித்ததை மறந்திருக்க மாட்டீர்கள்: சிலந்திக்கு 8 கால், வண்டுக்கு 6 கால்.

பெட்டியில் வண்டுகள் மட்டும்—மொத்தம் 8—இருந்ததாய் வைத்துக்கொள்வோம். அப்படியானால் $6 \times 8 = 48$ கால்கள் இருக்க வேண்டும், தரப்பட்டிருக்கும் எண்ணிக்கையை விட இது 6 குறைவானது. ஒரு வண்டை எடுத்துவிட்டு அதற்குப் பதில் ஒரு சிலந்தியை வைத்தால், கால்களின் எண்ணிக்கை 2 அதிகமாகிவிடும், ஏனெனில் சிலந்திக்குக் கால்கள் 6 அல்ல, 8.

மூன்று வண்டுகளை எடுத்துவிட்டு அவற்றுக்குப் பதில் 3 சிலந்திகளை வைத்தால், பெட்டியில் கால்களின் எண்ணிக்கை

தரப்பட்டிருக்கும் 54 ஆகிவிடும். 8 வண்டுகளுக்குப் பதிலாய் இப்போது பெட்டியில் 5 இருக்கும், மீதி 3உம் சிலந்திகள்.

ஆகவே சிறுவன் 5 வண்டுகளும் 3 சிலந்திகளும் பிடித்தான்.

சரி பார்ப்போம்: 5 வண்டுகளுக்கு 30 கால்கள், 3 சிலந்திகளுக்கு 24 கால்கள் $30 + 24 = 54$.

இன்னொரு வழியிலும் விடை காணலாம்: பெட்டியில் எல்லாம் சிலந்திகளாய்—மொத்தம் 8—இருந்ததாய்க் கொள்வோம். அப்போது கால்களின் எண்ணிக்கை $8 \times 8 = 64$. அதாவது தரப்பட்டதைவிட 10 அதிகம். ஒரு சிலந்தியை வண்டாய் மாற்றிக் கொண்டால் கால்களின் எண்ணிக்கையில் 2 குறையும். மொத்தம் 5 சிலந்திகளை வண்டுகளாய் மாற்றிக் கொண்டால் கால்களின் எண்ணிக்கை தரப்பட்ட 54 ஆகிவிடும். அதாவது 8 சிலந்திகளில் 3ஐப் பெட்டியில் வைத்துக் கொண்டு எஞ்சிய 5ஐயும் வண்டுகளாய் மாற்றிக் கொள்ள வேண்டும்.

94. மழையங்கியும், தொப்பியும், ஒரு ஜதை மிதியடி பொதியுறைகளும் வாங்குவதற்குப் பதில், அவன் இரண்டு ஜதை பொதியுறை மட்டும் வாங்கினால், 20 ரூபிள் தர வேண்டியதில்லை; மழையங்கியையும் தொப்பியையும் விட மிதியடி பொதியுறைகளின் விலை எவ்வளவு குறைவாகுமோ அவ்வளவு குறைவாய் (அதாவது 16 ரூபிள் குறைவாய்) தந்தால் போதும். ஆகவே இரு ஜதை மிதியடி பொதியுறைகளின் விலை $20 - 16 = 4$ ரூபிள். ஒரு ஜதையின் விலை 2 ரூபிள்.

மழையங்கி, தொப்பி இவை இரண்டுக்கும் சேர்த்து எவ்வளவு ஆகும் என்று இப்போது தெரிகிறது: $20 - 2 = 18$ ரூபிள். தொப்பியைவிட மழையங்கியின் விலை 9 ரூபிள் அதிகம் என்பதை அறிவோம். இனி மழையங்கிக்கும் தொப்பிக்கும் பதில் இரு தொப்பிகளாய் வாங்கிக் கொள்ளலாம். இப்போது நாம் கொடுக்க வேண்டியது 18 ரூபிள் அல்ல, இதனிலும் 9 ரூபிள் குறைவாய்க் கொடுத்தால் போதும். ஆகவே இரு தொப்பிகளின் விலை: $18 - 9 = 9$ ரூபிள், ஒரு தொப்பியின் விலை 4.5 ரூபிள்.

தனித் தனி விலை வருமாறு: மிதியடி பொதியுறை—2 ரூபிள்; தொப்பி—4.5 ரூபிள்; மழையங்கி—13.5 ரூபிள்

95. முட்டை விற்பனையாளர் மனதிற் கொண்டிருந்தது 29 முட்டைகளையுடைய கூடை. 23, 12, 5 குறிகளிட்ட கூடைகளில் கோழி முட்டைகள் இருந்தன; 14, 6 குறிகளிட்ட கூடைகளில் வாத்து முட்டைகள் இருந்தன.

சரிபார்ப்போம்: 29 முட்டைகளையுடைய கூடையை விற்றதும்,

$23 + 12 + 5 = 40$ கோழி முட்டைகளும்
$14 + 6 = 20$ வாத்து முட்டைகளும் பாக்கி இருக்கும்.

கணக்கில் கூறப்படுவது போல், வாத்து முட்டைகளைவிட இரு மடங்கு அதிகமான கோழி முட்டைகள் எஞ்சியிருக்கின்றன.

96. யாவும் சரியாகவே இருக்கின்றன. விமானம் போய்ச் சேர்வதற்கும் திரும்பி வந்து சேர்வதற்கும் ஒரே அளவு நேரம் தான் ஆகியிருக்கிறது, ஏனெனில் 80 நிமிடமும் 1 மணி 20 நிமிடமும் ஒரே நேரமேதான்.

80 நிமிடத்துக்கும் 1 மணி 20 நிமிடத்துக்கும் வித்தியாசம் இருப்பதாய் நினைக்கக் கூடிய கவனக் குறைவான வாசகருக்கென்று வகுக்கப்பட்ட கேள்வி இது.

97. தந்தையரில் ஒருவர் மற்றவரது புதல்வர் என்பதே இங்குள்ள இரகசியம். இங்கு இருப்போர் பாட்டனர், தந்தை, புதல்வர் ஆகிய மூவருமே அன்றி நான்கு பேர் அல்லர். பாட்டனர் தமது மகனுக்கு 150 ரூபிள் தருகிறர், இதிலிருந்து பின்னவர் பேரனுக்கு (அதாவது தமது மகனுக்கு) 100 ரூபிளைத் தருகிறர், ஆகவே பின்னவரது கையிருப்பு 50 ரூபிளே அதிகமாகிறது.

98. முதலாவது காயை 64 கட்டங்களில் எதில் வேண்டுமானுலும் வைக்கலாம், அதாவது இதை வைப்பதற்கு 64 வழிகள் உள்ளன. இதை வைத்ததும் இரண்டாவது காயிற்கு 63 கட்டங்கள் எஞ்சுகின்றன. முதலாவது காயிற்குரிய 64 நிலைகளில் எதனுடன் வேண்டுமானுலும் இரண்டாவது காயிற்குரிய 63 நிலைகளில் ஒன்றை இணையச் செய்யலாம். ஆகவே இரண்டு காய்களையும் டிராப்ட் பலகையில் வைப்பதற்குள்ள வெவ்வேறன இணைவுகள் $64 \times 63 = 4,032$ இருக்கின்றன.

99. இரண்டு இலக்கங்களைக் கொண்டு எழுதக் கூடிய மிகச் சிறிய முழு எண் சிலர் நினைக்கக்கூடியது போல 10 அல்ல, 1ஆகும்; இதனை பின்வரும் பல்வேறு வழிகளிலும் எழுதலாம்:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4} \ldots \frac{9}{9}.$$

இயற்கணிதம் தெரிந்தவர்கள் பின்வரும் வழிகளிலும் 1ஐ எழுதிக் காட்டலாம்:

$$10^0,\ 20^0,\ 30^0,\ 40^0\ \ldots\ 90^0,$$

ஏனெனில் எந்த எண்ணையும் சுன்னத்தின் அடுக்குக்கு உயர்த்தியதும் அது 1க்குச் சமமாகிவிடுகிறது.*

100. 1ஐ இரு பின்னங்களின் கூட்டுத் தொகையாய்க் காட்ட வேண்டும்:

$$\frac{148}{296} + \frac{35}{70} = 1.$$

இயற்கணிதம் தெரிந்தவர்கள் வேறு வழிகளிலும் 1ஐ எழுதிக் காட்டலாம்:

$$1234567890^0;\quad 234567^{9-8-1}\ldots$$

101. இரு வழிகள் வருமாறு:

$$9\,\frac{99}{99} = 10,$$

$$\frac{99}{9} - \frac{9}{9} = 10.$$

இயற்கணிதம் தெரிந்தவர்கள் வேறு வழிகளையும் குறிப்பிடலாம். உதாரணம்:

$$\left(9\,\frac{9}{9}\right)^{\frac{9}{9}} = 10,$$

$$9 + 99^{9-9} = 10.$$

102. நான்கு வழிகள் வருமாறு:

$$70 + 24\,\frac{9}{18} + 5\,\frac{3}{6} = 100$$

$$80\,\frac{27}{54} + 19\,\frac{3}{6} = 100$$

$$87 + 9\,\frac{4}{5} + 3\,\frac{12}{60} = 100$$

$$50\,\frac{1}{2} + 49\,\frac{38}{76} = 100.$$

---

* 0/0 அல்லது 0^0 என்று எழுதுவது சரியல்ல, இவை அர்த்தமற்ற கோவைகள்.

103. ஒரே மாதிரியான ஐந்து இலக்கங்களைக் கொண்டு *100*ஐ எழுதுவது சுலபமே—*1*களையும் *3*களையும் கொண்டு எழுதலாம், *5*களைக் கொண்டு எழுதுவதே மிகச் சுலபமான வழி. நான்கு வழிகள் வருமாறு:

$$111 - 1 = 100;$$
$$33 \times 3 + \frac{3}{3} = 100;$$
$$5 \times 5 \times 5 - 5 \times 5 = 100;$$
$$(5 + 5 + 5 + 5) \times 5 = 100.$$

104. *1,111* என்பதாய்ப் பலரும் பதிலளிப்பார்கள். ஆனால் இதைக் காட்டிலும் மிகப் பல மடங்கு பெரிய எண்ணை எழுத முடியும்: 11^{11} அதாவது *11*இன் *11*ஆம் அடுக்கு. இறுதி வரை பெருக்கிச் சென்று இதன் மதிப்பைக் கணக்கிட உங்களுக்குப் பொறுமை இருக்குமானால் (இந்தப் பெருக்கலை மடக்கைகளைக் (logarithms) கையாண்டு போட்டால் பெரிதும் எளிதாகி விடும்), இந்தப் பெருக்குத் தொகை *28,000,00,00,000*க்கும் அதிகம் என்பதைக் காண்பீர்கள். *1,111*ஐவிட இது *25* கோடி மடங்கு பெரிதாகும்.

105. வெவ்வேறான நான்கு வழிகளில் இதற்கு விடை கூறலாம். அவையாவன:

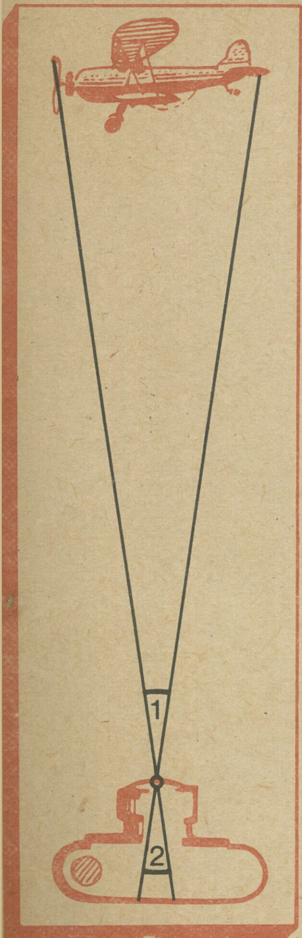
$$13,37,174 \div 943 = 1,418;$$
$$13,43,784 \div 949 = 1,416;$$
$$12,00,474 \div 846 = 1,419;$$
$$12,02,464 \div 848 = 1,418.$$

106. இதற்கு ஒரேயொரு விடைதான் இருக்கிறது:

$$737,54,28,413 \div 1,25,473 = 58,781.$$

மேற்கண்ட இரு கணக்குகளும் ஓரளவு கடினமானவை, முதலில் இவை அமெரிக்க வெளியீடுகளாகிய ஸ்கூல் வேர்ல்டிலும் *(1906)* மாத்தமாட்டிகல் மாகசீனிலும் *(1920)* வெளி வந்தவை.

107. ஒரு சதுர மீட்டர் பத்து லட்சம் சதுர மில்லிமீட்டருக்குச் சமம். ஆயிரம் மில்லிமீட்டர் சதுரங்களை ஒன்றையடுத்து ஒன்றாய் நீள்வரிசையில் வைத்தால் அவை *1* மீட்டர் நீளத்துக்குச் செல்லும். ஆகவே பத்து லட்சம் மில்லிமீட்டர் சதுரங்களை



படம் 98.

இப்படி வைத்தால் இந்த வரிசை 1,000 மீட்டர், அதாவது 1 கிலோ மீட்டர் நீளமுடையதாய் இருக்கும்.

108. விடை நம்மைத் திகைக்கச் செய்து விடும். இந்தக் கம்பம்... 1,000 கிலோமீட்டர் உயரமுடையதாய் இருக்கும்! நாம் மனக் கணக்காய்ப் போட்டுப் பார்க்கலாம். ஒரு கன மீட்டர் 1,000 கன மில்லிமீட்டர் $\times 1,000 \times 1,000$க்குச் சமம். ஓராயிரம் மில்லிமீட்டர் கனசதுரங்களை ஒன்று மீது ஒன்ருய் அடுக்கிஞல் கம்பத்தின் உயரம் 1 மீட்டர். இங்கு நம்மிடம் $1,000 \times 1,000$ மடங்கு அதிகமான கனசதுரங்கள் இருப்பதால், கம்பம் 1,000 கிலோ மீட்டர் உயரமுடையதாகிவிடும்.

109. படம் 98ல் கோணங்கள் 1உம் 2உம் சமமாய் இருப்பதால், விமானத்தின் நீள் அளவுகளுக்கும் அதன் படத்தின் ஒத்த அளவுகளுக்கும் உள்ள விகிதம், காமிரா ஒளிவில்லையிலிருந்து விமானம் இருக்கும் தூரத்துக்கும் காமிரா ஆழத்துக்கும் உள்ள விகிதத்துக்குச் சமம் என்பது தெரிகிறது. விமானம் x மீட்டர் உயரததில் பறப்பதாய்க் கொண்டால் விகிதச் சமன்பாடு கிடைக்கிறது:

$$12,000 : 8 = x : 0.12,$$

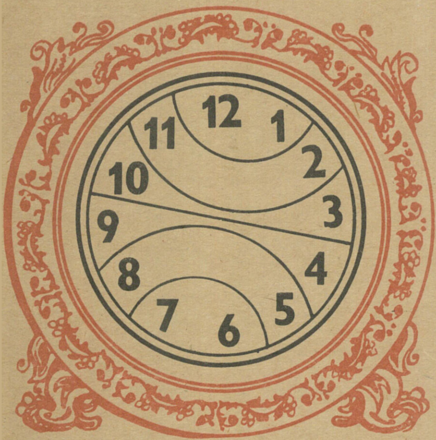
ஆகவே $x = 180$ மீட்டர்.

110. மனக் கணக்காய் இதைப் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம். 89.4 கிராமை பத்துலட்சத்தால், அதாவது 1,000 ஆயிரங்களால் பெருக்க வேண்டும்.

இரு கட்டங்களாய்ப் பிரித்து இதைச் செய்கிறோம்: 89.4 கிராம் $\times$ 1,000 = 89.4 கிலோகிராம், ஏனெனில் ஒரு கிராமைப் போல் ஆயிரம் மடங்கானதே ஒரு கிலோகிராம். பிறகு 89.4 கிலோகிராம் $\times$ 1,000 = 89.4 டன்கள் ஏனெனில் கிலோகிராமைவிட ஒரு டன் 1,000 மடங்கு பெரிது.

ஆகவே நமக்கு வேண்டிய எடை 89.4 டன்களாகும்.

111. A புள்ளியிலிருந்து B புள்ளிக்குப் போக மொத்தம் 70 வழிகள் உள்ளன. (இயற்கணிதத்தில் கற்கப்படும் பாஸ்கலின் முக்கோணத்தை உதவியாய்க் கொண்டுதான் இந்தக் கணக்குக்கு முறையான தீர்வுகாண முடியும்).



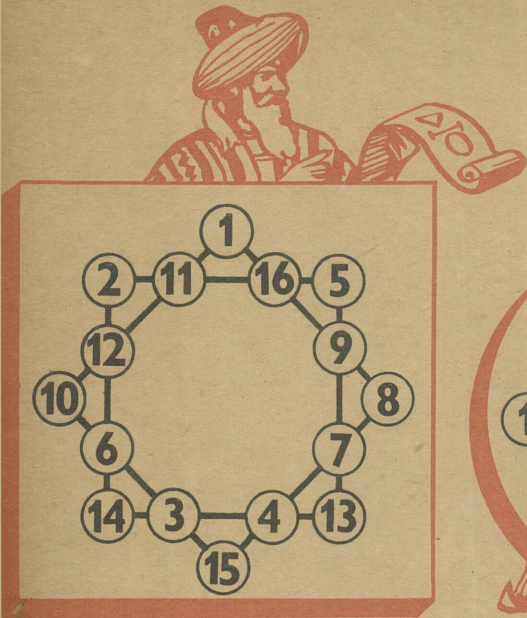
படம் 99.

112. கடிகார முகப்பிலுள்ள எல்லா எண்களின் கூட்டுத் தொகை 78. ஆகவே ஆறு துண்டுகளில் ஒவ்வொன்றிலும் எண்களின் கூட்டுத் தொகை $78 \div 6 = 13$ ஆகும். இந்த விவரத்தை உதவியாய்க்கொண்டு படம் 99ல் காட்டியுள்ளபடி கடிகார முகப்பைத் துண்டாடிப் பிரிக்கிறோம்.

113-114. தீர்வுகள் படங்கள் 100 லும் 101லும் காட்டப்படுகின்றன.

115. விசும்பில் எந்த மூன்று புள்ளிகளின் மூலமும் ஒரேயொரு தளம்தான் செல்ல முடியும். ஆகவே முக்காலியின் மூன்று கால்களும் எப்போதும் தரைமீது படிந்தே இருக்கும். முக்காலி நொடிக்காமல் உறுதியாய் நிற்பதற்கு இதுவே காரணம்—முற்றிலும் வடிவகணித வழிப்பட்ட காரணம், பௌதீக வழிப்பட்டதல்ல என்பது தெரிகிறது.

நில அளவைக் கருவிகளுக்கும் புகைப்படக் காமிராக்களுக்கும் முக்காலிகள் வசதியாய் அமைவதற்குக் காரணம் இதுவேதான். நான்காவது காலினால் உறுதிப்பாடு அதிகமாகிவிடாது, மாறாக சங்கடமே ஏற்படும்.



படம் 100.

படம் 101.

116. மணி எவ்வளவு என்பதைக் கவனிப்போமாயின், எளிதில் விடை கண்டுவிடலாம். இடப்பக்கத்து கடிகாரத்தில் (படம் 95) மணி 7 ஆகிறது. ஆகவே இரு எண்களுக்கும் இடையிலுள்ள வில் கடிகார முகப்பின் சுற்றளவில் $\frac{5}{12}$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

இதைப் பாகைக் கணக்கில் மாற்றுவோமாயின், இரு முட்களுக்கும் இடையிலுள்ள கோணம்:

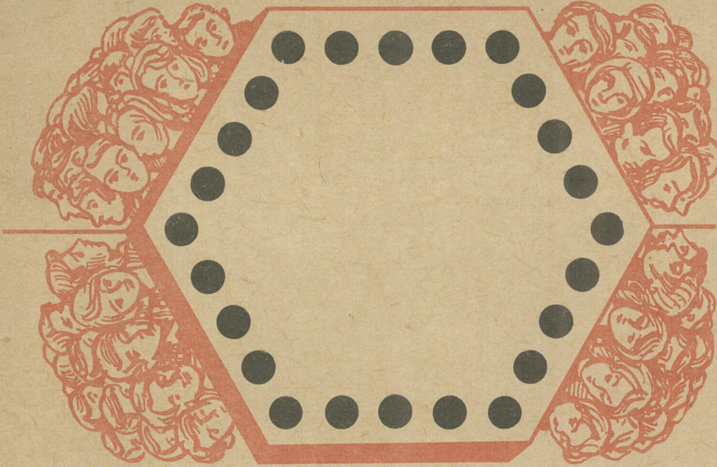
$$360° \times \frac{5}{12} = 150°.$$

வலப் பக்கத்திலுள்ள கடிகாரத்தின் முட்கள் 9.30 மணி காட்டுகின்றன. இங்குள்ள வில் கடிகார முகப்பின் சுற்றளவில் $3\frac{1}{2} \times \frac{1}{12}$ அதாவது $\frac{7}{24}$ பங்காகும்.

பாகைக் கணக்கில் மாற்றினால், கோணம் கிடைக்கிறது:

$$360° \times \frac{7}{24} = 105°.$$

117. சராசரி மனிதனின் உயரம் 175 சென்டிமீட்டர் என்றும்,



படம் 102.

பூமியின் ஆரம் R என்றும் கொள்வோமாயின், இரு சுற்றளவுகளுக்கும் இடையிலுள்ள வேறுபாடு:

$2 \times 3.14 \times (R + 175)) - 2 \times 3.14 \times R) = 2 \times 3.14 \times \times 175 = 1{,}100$ சென்டிமீட்டர், அதாவது 11 மீட்டர். இங்கு வியப்புக்குரியது என்னவெனில், இந்த வேறுபாடு பூமியின் ஆரத்தைப் பொறுத்திருக்கவில்லை, ஆகவே சூரியனைப் போன்ற பெரிய கோளமாயினும் சின்னஞ் சிறு பந்தாயினும் இது மாற்றமின்றி அப்படியேதான் இருக்கும்.

118. படம் 102ல் காட்டப்படுவது போல் இவர்களை அறுகோன வடிவில் நிற்க வைக்க வேண்டும்.

119. இந்தக் கணக்கில் குறிப்பிடத்தக்கதாய் இருப்பது என்னவெனில், a, b, c, d, ஆகியவை குறிப்பிட்ட மதிப்புகளை ஏற்கும் போதுதான் கணக்கு தீர்வுடையதாகிறது. இவை விருப்பம் போல் எந்த மதிப்பையும் ஏற்கையில் கணக்குக்குத் தீர்வு இல்லை.

படம் 96ல் சாய்வுக் கோடுகளிட்டுக் காட்டப்படும் பகுதியைச் சாய்வுக் கோடுகளிடப்படாத பகுதிகளுக்குச் சமமாக்குவதே இங்கு நாம் செய்ய வேண்டிய பணி. LM கோடு BCஐவிட குட்டை என்பது தெரிகிறது. ஆகவே அது ABக்குச் சமமாக வேண்டும். அதே போது LM கோடு RCக்குச் சமமாக

வேண்டும். ஆகவே $LM = RC = b$. எனவே $BR = a - b$. ஆனால் BR கோடு KLக்கும் CEக்கும் சமமாய் இருத்தல் வேண்டும், அதாவது $(a - b)$உம் KL கோடும் dக்குச் சமமாதல் வேண்டும்.

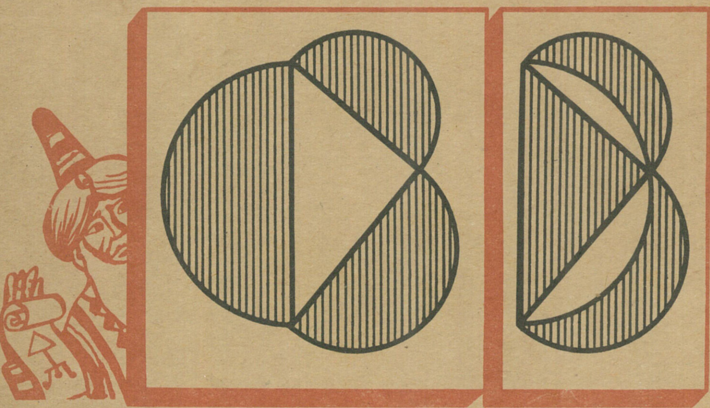
a, b, d ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை நம் விருப்பம் போல் அமைத்துக் கொள்ள முடியாது என்பது தெரிகிறது. a, b பக்கங்களுக்கு இடையிலுள்ள வித்தியாசத்துக்கு d சமமாய் இருக்க வேண்டும். அது மட்டுமல்ல. எல்லா பக்கங்களும் a பக்கத்தில் குறிப்பிட்ட துண்டுகளாகவும் இருக்க வேண்டும் என்பது விளங்குகிறது.

ஆனால் $PR+KL=AB$, அதாவது $PR + (a - b) = b$. ஆகவே $PR = 2b - a$. கோடுகளிடப்பட்ட பகுதிகளின் பக்கங்களையும் வலப்பக்கத்தில் உள்ள கோடுகளிடப் படாத பகுதியின் ஒத்த பக்கங்களையும் ஒப்பிடுவோமாயின், $PR = MN$, அதாவது $PR = \frac{d}{2}$. எனவே $\frac{d}{2} = 2b - a$, இந்தச் சமன்பாட்டையும் $a - b = d$ என்பதையும் கொண்டு $b = \frac{3}{5}a$, $d = \frac{2}{5}a$ என்று கணக்கிடுகிறோம். கோடு களிடப்பட்ட பகுதியையும் இடப்பக்கத்தில் உள்ள கோடு களிடப்படாத பகுதியையும் ஒப்பிடுகையில் நமக்குத் தெரிய வருவதாவது: $AK = MN$, அதவாது $AK = PR = \frac{d}{2} = \frac{1}{5}a$. இவ்வாறு $KD = PR = \frac{1}{5}a$ என்று தெரிகிறது. ஆகவே $AD = \frac{2}{5}a$.

எனவே வெட்டப்பட்ட நமது செவ்வகத்தின் பக்கங்களை நம் விருப்பம் போல் அமைத்துக் கொள்ள முடியாது, அவை 'a' பக்கத்தின் குறிப்பிட்ட விகிதங்களாய் $\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ இருக்க வேண்டும். அப்போது மட்டும்தான் தீர்வு சாத்தியம்.

120. வட்டத்தைச் சதுரமாக்க முடியாது என்று கேள்விப்பட்டிருக் கும் வாசகர்கள் வடிவகணித வழியில் இப்பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காண முடியாதெனக் கருதக் கூடும். வட்டத்தைச் சதுரமாக்க முடியாதெனில், இரு வில்களால் ஆகிய பிறையை சிலுவை வடிவிலான செவ்வகங்களாய் மாற்றுவது எப்படி என்று நினைக்கத் தோன்றும்.

ஆயினும், செங்கோண முக்கோணத்தின் செம்பக்கத்தின் மீது வரையப்பட்ட அரைவட்டம் ஏனைய இரு பக்கங்களின் மீது வரையப்பட்ட அரைவட்டங்களது கூட்டுப் பரப்புக்குச் சமம் (படம் 103) என்கிற பிரபல பைத்தகோரஸ் முடிவின் சுவையான துணை முடிவுகளில் ஒன்றைப் பயன்படுத்தி வடிவகணித முறையில் இந்தப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காண முடியும். பெரிய அரைவட்டத்தை எதிர்ப் பக்கத்துக்கு மாற்றினால் (படம் 104), கோடுகளிடப்பட்ட இரு பிறைகளின்



படம் 103. படம் 104.

கூட்டுப் பரப்பு முக்கோணத்துக்குச் சமம்* என்பதைக் காண்கிறோம். நமது முக்கோணம் இருசமபக்க முக்கோணமாய் இருந்தால், இந்த இரு பிறைகளில் ஒவ்வொன்றும் இந்த முக்கோணத்தில் பாதிக்குச் சமமாய் இருக்கும் (படம் 105).

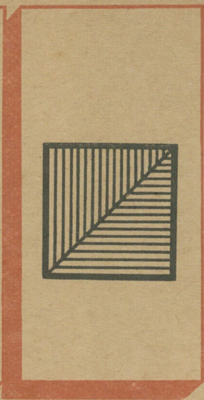
ஆகவே வடிவகணித வழியில், நாம் ஒரு பிறையின் பரப்புக்குச் சமமான பரப்புள்ள இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணம் ஒன்றை வரைய முடியும்.

இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணத்தை சுலபமாய் ஒரு சதுரமாக்க முடியும் (படம் 106) என்பதால், வடிவகணித வழியில் நமது பிறையை ஒரு சதுரமாய் மாற்றிக் கொண்டு விடலாம்.

---

* வடிவகணிதத்தில் இந்தச் சமன்பாட்டு உறவுக்கு ‘‘ஹிப்போகிரேடசின் பிறைகள்’’ என்று பெயர்.

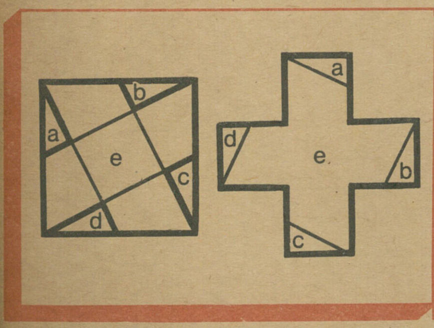
படம் 105.



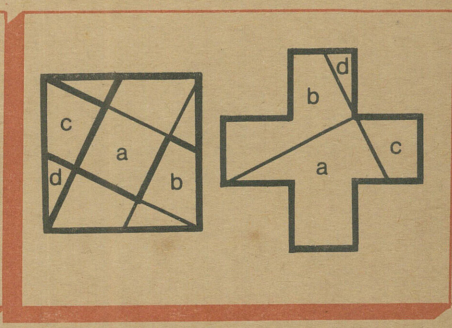
படம் 106.

இனி இந்தச் சதுரத்தை அதற்குச் சமமான சிலுவையாய் மாற்றுவதுதான் எஞ்சியிருக்கும் பணி. இந்தச் சிலுவை 5 சமசதுரங்களால் ஆனது என்பது தெரிகிறது. சிலுவையைச் சதுரமாக்கும் பணியை பல வழிகளில் செய்யலாம். படங்கள் 107, 108ல் இரு வழிகள் காட்டப்படுகின்றன. இரண்டிலும் சதுரத்தின்முனைகளை எதிர் பக்கங்களது மையப் புள்ளிகளுடன் இணைத்து இப்பணி செய்யப்படுகிறது.

ஆனால் பிறையை அதற்குச் சமமான பரப்புள்ள சிலுவையாய் மாற்றுவதற்கு, நமது பிறை அரைவட்டப் பரிதியாய் அமைந்த ஒரு வெளிப்புற வில்லையும், ஒப்பளவில் பெரிய ஆரத்தைக் கொண்ட கால்வட்டப் பரிதியாய் அமைந்த உட்புற வில்லையும் கொண்டு உருவானதாய் இருக்க வேண்டுமென்பதை நாம் நினைவில் கொள்ள வேண்டும்.*

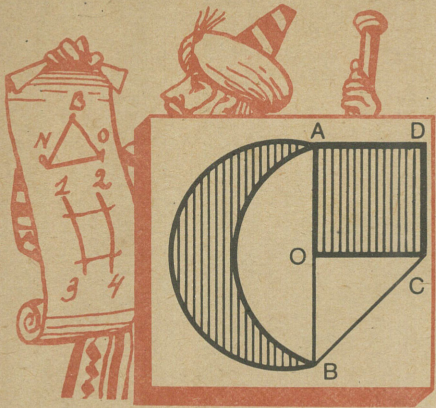


படம் 107.



படம் 108.

* வானத்தில் நாம் காணும் பிறை மதியின் வடிவம் சற்று மாறானது: இதன் வெளிப்புற வில் அரைவட்டப் பரிதியும், உட்புற வில் அரை நீள்வட்டப் பரிதியும் ஆகும். சித்திரக்காரர்கள் அடிக்கடி வட்டத்து வில்களைக் கொண்டு தவறாய் இதை வரைந்து காட்டுகிறார்கள்.



படம் 109.

பிறைக்குச் சமமான பரப்பு கொண்ட சிலுவையை எப்படி அமைப்பதெனக் காட்டியிருக்கிறேன். பிறையின் முனைகளாகிய A,Bஐ (படம் 109) நேர் கோட்டால் இணைத்து, இந்த நேர் கோட்டின் மையப் புள்ளியில் (0) செஞ்குத்துக் கோடிட்டு, OAவுக்குச் சமமான OCஐ இதில் குறிக்க வேண்டும். பிறகு OAC இருசமபக்க முக்கோணத்தை OADC சதுரமாய்ப் பூர்த்தி செய்ய வேண்டும். இனி படங்கள் 107, 108ல் காட்டப்பட்டுள்ள இரு வழிகளில் ஒன்றைக் கையாண்டு OADC சதுரத்தைச் சிலுவையாய் மாற்ற வேண்டும்.

வாசக நேயர்களுக்கு

இந்தப் புத்தகத்தைப் பற்றியும் இதன் தயாரிப்பைப் பற்றியும் தங்கள் கருத்தை அறியவும், அடுத்துவரும் வெளியீடுகள் சம்பந்தமாகத் தங்கள் யோசனைகளை வரவேற்கவும் மீர் பதிப்பகம் மகிழ்வுடன் காத்திருக்கிறது.

நமது முகவரி:

Mir Publishers
2, Pervy Rizhsky Pereulok
Moscow, USSR

விலை: 5 ரு